Toegepaste Wiskunde B242

VOORBEREIDING VIR ASSESSERING A1 2023

Die toets gaan oor die volgende paragrawe in ZILL: 7.5, 9.1, 9.4, 9.5, 9.6, 9.7, 9.8, 9.9, 9.10.

Die toets het twee afdelings — Afdeling A: veelvuldige keuse vrae, en Afdeling B: 'uitskryf'-vrae, wat op die vraestel beantwoord word.

Daar word geen formules gegee nie. Sakrekenaars word toegelaat, ook dié wat integrasie kan doen.

Vir hierdie toets moet jy die volgende kan doen:

7.5

- Moet die vergelyking van 'n lyn in 3D in vektorvorm, of in parametriese vorm, of in simmetriese vorm, kan neerskryf as inligting soos (a) een punt op die lyn en inligting oor die rigting, of (b) twee punte op die lyn, gegee word.
- Moet die vergelyking van 'n vlak in 3D kan neerskryf in vektorvorm met twee oriëntasie-vektore (d.w.s. $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a} + s\mathbf{b}$), of met 'n normaalvektor ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_1$), of in die vorm van 'n vergelyking in x, y, en z, as inligting soos (a) een punt op die vlak en twee oriëntasie-vektore, of (b) een punt op die vlak en die normaal op die vlak, of (c) drie punte op die vlak, of (d) een punt op die vlak en ander inligting waaruit die oriëntasie van die vlak bepaal kan word, gegee word.

9.1

- Moet 'n vektorfunksie $\mathbf{r}(t)$ in 3D kan skets (eenvoudige gevalle wat redelikgewys sketsbaar is).
- Die afgeleide van 'n vektorfunksie $\mathbf{r}'(t)$ kan bereken en kan gebruik om byvoorbeeld raaklyne by sekere punte op $\mathbf{r}(t)$ te vind.
- Die kettingreël vir parsiële afgeleides korrek kan toepas.
- Die booglengte van $\mathbf{r}(t)$ kan bereken vir 'n gegewe interval van t.

9.4

- Kontoerkrommes kan skets vir $f(x, y)$.
- Kontoer-oppervlakke kan beskryf vir $f(x, y, z)$ (slegs eenvoudiger gevalle waar die kontoer-oppervlak 'n sfeer, ellipsoïed, of paraboloïed, keël, of hiperboloïed is).

9.5

- Moet die gradiënt van $f(x, y)$ en van $f(x, y, z)$ kan bereken.
- Moet die rigtingsafgeleide van $f(x, y)$ (of ook $f(x, y, z)$) in gegewe rigting kan bereken.
- Moet kan bewys dat die maksimum van die rigtingsafgeleide gegee word deur $\|\nabla f\|$.
- Moet die volgende identiteite (en soortgelykes) kan bewys: $\nabla(cf) = c\nabla f$, $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$, $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$, en $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$. Hier is f en g funksies van x, y en z, en c is 'n konstante.

9.6

- Moet die interpretasie van ∇f kan gee en gebruik in probleme: dit is 'n vektor wat in die rigting van grootste toename in f wys, en waarvan die grootte die tempo van toename van f in daardie rigting is.
- Moet ∇f kan gebruik om (a) vergelyking van die lyn loodreg op 'n kontoer-kromme te kan neerskryf, (b) die vergelyking van die lyn loodreg op 'n kontoer-oppervlak kan neerskryf, (c) vergelyking van raakvlak aan kontoer-oppervlak kan neerskryf.

9.7

- Moet vektorvelde in 2D kan skets.
- Moet $\nabla \cdot \mathbf{F}$ sowel as $\nabla \times \mathbf{F}$ kan bereken vir $\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{i}P(x,y,z) + \mathbf{j}Q(x,y,z) + \mathbf{k}R(x,y,z)$, (a) in die algemeen i.t.v. x, y, en z, asook (b) by 'n spesifieke (gegewe) punt.
- Moet die terme *irrotasioneel* en *onsamedrukbaar* kan beskryf.
- Moet identiteite soos, 'Exercise 9.7', 17-32 kan bewys. Soortgelyke identiteite kan gevra word.

9.8

- Moet lynintegrale soos $\int F ds$, of $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ langs gegewe stuksgewys-kontinue paaie kan bereken. Beide 2D gevalle en 3D gevalle kan gevra word.
- Moet die arbeid verrig op 'n deeltjie wat in 'n gegewe kragveld langs 'n gegewe pad beweeg, kan bereken.

9.9

- Moet kan bepaal of 'n differensiaal van die vorm $Pdx + Qdy$ 'n eksakte differensiaal is.
- Moet die potensiaalfunksie van 'n eksakte differensiaal van die vorm $Pdx + Qdy$ kan verkry deur integrasie.
- Moet lynintegrale van die vorm $\int_C Pdx + Qdy$ padonafhanklik kan bereken met behulp van die potensiaalfunksie, waar $Pdx + Qdy$ 'n eksakte differensiaal is.

9.10

- Moet dubbelintegrale (tipe I en II) kan bereken, waar óf (a) die rand gegee word as 'n figuur, óf (b) die rand gegee word as vergelykings.
- Moet die volgorde van integrasie korrek kan omruil waar nodig of waar gevra.
- Moet die area en volume van liggame kan bereken uit $A = \iint_R dA$, $V = \iint_R f(x,y)dA$.
- Moet massas, en koördinate van massa-middelpunte van laminas met veranderlike digtheid kan bereken uit: $m = \iint_R \rho(x,y)dA$, $m\bar{x} = \iint_R x\rho(x,y)dA$, $m\bar{y} = \iint_R y\rho(x,y)dA$.

— *<u>Laat uit</u>: Traagheidsmomente.*

Algemeen

Moet vektorvelde kan teken of herken as die uitdrukking gegee word en andersom. Moet kan vasstel of 'n gegewe uitdrukking in terme van ∇ 'n vektor of 'n skalaar (of onsinnig) is.

Moet die volgende terme ken (en waar toepaslik in simbole kan uitdruk, bv. '$\mathbf{F}$ is onsamedrukbaar' beteken $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$): 'vektorveld', 'raaklyn', 'raakvlak', 'gradiënt', 'rotasie', 'divergensie', 'irrotasioneel', 'onsamedrukbaar', 'eksakte differensiaal', 'pad-onafhanklik', 'normaal op 'n oppervlak', 'booglengte'.