TW 214 TOETS 1 - VOORBEREIDING 2023

TEST 1 - PREPARATION

Updated: 25 April 2023

Die toets gaan oor die volgende onderwerpe:

- VEKTORE, LYNE EN VLAKKE
- MATRIKSBEWERKINGS EN LU-ONTBINDING
- VEKTORRUIMTES
- FUNDAMENTELE RUIMTES VAN 'N MATRIKS en OPLOS VAN REGHOEKIGE STELSELS
- PROJEKSIES EN REFLEKSIES
- KLEINSTE-KWADRATE OPLOSSING
- ORTOGONALE MATRIKSE EN QR-ONTBINDING
- EIEWAARDE-ONTBINDING

The test will be on the following topics

- *VECTORS, LINES AND PLANES*
- *MATRIX MANIPULATION AND LU-DECOMPOSITION*
- *VECTOR SPACES*
- *FUNDAMENTAL SPACES OF A MATRIX and SOLUTION OF RECTANGULAR SYSTEMS*
- *PROJECTIONS AND REFLECTIONS*
- *LEAST-SQUARES SOLUTION*
- *ORTHOGONAL MATRICES AND QR-DECOMPOSITION*
- *EIGENVALUE DECOMPOSITION*

VEKTORE, LYNE EN VLAKKE

— Lengte van vektor en dotproduk ken en kan bereken.

— Hoeke tussen vektore kan bereken.

— Hoeke en lengtes kan bereken in R^3.

— Moet die vergelyking van 'n lyn in 3D in vektorvorm, of in parametriese vorm, of in simmetriese vorm, kan neerskryf as inligting soos (a) een punt op die lyn en inligting oor die rigting, of (b) twee punte op die lyn, gegee word.

— Moet die vergelyking van 'n vlak in 3D kan neerskryf in vektorvorm met twee oriëntasie-vektore (d.w.s. $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a} + s\mathbf{b}$), of met 'n normaalvektor ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_1$), of in die vorm van 'n vergelyking in x, y, en z, as inligting soos (a) een punt op die vlak en twee oriëntasie-vektore, of (b) een punt op die vlak en die normaal op die vlak, of (c) drie punte op die vlak, of (d) een punt op die vlak en ander inligting waaruit die oriëntasie van die vlak bepaal kan word, gegee word.

VECTORS, LINES AND PLANES

— *Know and be able to calculate the length of a vector and dot product.*

— *Be able to calculate angles between vectors.*

— *Be able to calculate angles and lengths in* R^3.

— *Must be able to write down the equation of a line in 3D in vector form, or in parametric form, or in symmetric form when information such as (a) one point on the line and information about the direction, or (b) two points on the line, are given.*

— *Must be able to write down the equation of a plane in 3D in vector form with two orientation vectors (i.e.* $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a} + s\mathbf{b}$*), or with a normal vector* $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_1$*, or in the form of an equation in* x*,* y*, and* z*, when information such as (a) one point on the plane and two orientation vectors are given, or (b) one point on the plane and the normal to the plane are given, or (c) three points on the plane are given, or (d) one point on the plane and other information from which the orientation of the plane may be determined, is given.*

MATRIKSBEWERKINGS EN LU-ONTBINDING VIR $n \times n$-MATRIKSE

— manipulasie met matriksvergelykings kan doen (bv. tutprobleme 3.4, 3.10, 3.12(f)).

MATRIX MANIPULATION AND LU-DECOMPOSITION FOR $n \times n$ -MATRICES

— *be able to do manipulation with matrix equations (e.g. tut problems 3.4, 3.10, 3.12(f)).*

— Oplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ met LU-ontbinding, en dan voorwaartse en terugwaartse substitusie kan kry

— *Laat uit: LDU-ontbinding, Cholesky ontbinding vir simmetriese matrikse,*

— Die volgende terme en begrippe moet verduidelik kan word en korrek gebruik kan word: elementêre, bodriehoeks-, onderdriehoeks-, permutasie en diagonaal- matrikse, spil-element, singulier, inverse, transponent, simmetriese matrikse, antisimmetriese matrikse.

— *be able to obtain solutions of* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *with LU-decomposition, and then forward and backward substitution*

— Omit: LDU-decomposition, Cholesky decomposition for symmetric matrices,

— *Be able to explain and correctly use the following terms and concepts: elementary, upper-triangular, lower-triangular, permutation and diagonal matrices, pivot element, singular, inverse, transpose, symmetric matrices, skew-symmetric matrices.*

VEKTORRUIMTES

— Wanneer is 'n versameling 'n *vektorruimte*? Moet kan vasstel of 'n gegewe versameling 'n vektorruimte is (bv. tutprobleem 5.3).

— Moet gegewe vektorversamelings meetkundige kan beskryf (byvoorbeeld 'n vlak, 'n lyn, die eerste kwadrant, ens.). (bv. tutprobleme 5.1).

— Moet die dimensie van 'n vektorruimte kan bepaal. Meer ingewikkelde voorbeelde waar trapvorm nodig is om die dimensie te bepaal, kan gevra word.

— Moet kan bepaal of 'n gegewe stel vektore lineêr onafhanklik is. Eenvoudige voorbeelde waar die onafhanklikheid/afhanklikheid maklik ingesien kan word sonder uitvoerige bewerkings (bv. tutprobleem 5.6) kan gevra word, sowel as meer ingewikkelde voorbeelde waar trapvorm nodig is.

VECTOR SPACES

— *When is a set a* vector space*? Must be able to determine whether a given set is a vector space (eg. tut problem 5.3).*

— *Must be able to describe given vector sets geometrically (e.g. a plane, a line, the first quadrant, etc.). (e.g. tut problem 5.1).*

— *Must be able to determine the dimension of a vector space. Examples where echelon form is necessary to determine the dimension, may be asked.*

— *Must be able to determine whether a given set of vectors is linearly independent. Simple examples where the independence/dependence can easily be seen without many calculations (e.g. tut problem 5.6) may be asked, but more complex examples where echelon form is necessary may also be asked.*

MATRIKS-RUIMTES en OPLOS VAN REGHOEKIGE STELSELS

— Moet basisse vir die nulruimte, en kolomruimte van 'n reghoekige matriks kan vind. Portretvormige of landskapvormige matrikse kan gevra word.

(*Laat uit: die vind van basisse vir die ryruimte en linksnulruimte*)

— Moet die dimensies van die nulruimte, kolomruimte, ryruimte en linksnulruimte van 'n matriks kan vind, en kan verduidelik waar dit vandaan kom.

— Moet die rang van 'n reghoekige matriks kan vind.

— Moet 'n reghoekige stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kan oplos, as $\mathbf{b}$ in die kolomruimte van A lê, of kan aantoon dat geen oplossing bestaan nie (d.w.s. kan aantoon dat $\mathbf{b}$ nie in die kolomruimte van A lê nie.) Weereens mag A of portretvormig of landskapvormig wees.

— Moet kan verduidelik hoekom die dimensies van die kolomruimte en ryruimte van 'n $m \times n$-matriks A r is (waar $r = \text{rang}(A)$), en díe van die nulruimte $n - r$ en die linksnulruimte $m - r$ is. Moet ook kan verduidelik in watter draer-ruimtes elk van die vier ruimtes van A lê.

— Die volgende terme en begrippe moet verduidelik en korrek gebruik kan word: R^n, draer-ruimte ("host space"), vektorruimte, lineêre onafhanklikheid, dimensie, rang, onderspan, basis, nulruimte, kolomruimte, ryruimte, linksnulruimte.

MATRIX SPACES and SOLUTION OF RECTANGULAR SYSTEMS

— *Must be able to find bases for the null space, and column space of a rectangular matrix. Portrait-shaped or landscape-shaped matrices may be asked.*

(Omit: Finding bases for the row space and the left null space.)

— *Must be able to find the dimensions of the null space, column space, row space and left null space of a matrix, and explain where it comes from.*

— *Must be able to find the rank of a rectangular matrix.*

— *Must be able to solve a rectangular system* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, *if* $\mathbf{b}$ *lies in the column space of A, or show that no solution exist (i.e. show that* $\mathbf{b}$ *does not lie in the column space of A.) Again, A may be portrait-shaped or landscape-shaped.*

— *Must be able to explain why the dimensions of the column space and row space of an* $m \times n$*-matrix A is* r *(where* $r = \text{rank}(A)$*), and that of the nullspace is* $n - r$ *and the left nullspace* $m - r$*. Must also be able to explain in which host spaces each of the four spaces of A lie.*

— *Must be able to explain and correctly use the following terms and concepts:* R^n*, host spaces, vector space, linear independence, dimension, rank, span, basis, nullspace, column space, row space, left nullspace.*

PROJEKSIES EN REFLEKSIES

— Die projeksie van $\mathbf{b}$ op lyn gegee deur $\mathbf{a}$ kan vind, of die projeksie van $\mathbf{b}$ op die vlak onderspan deur $\mathbf{a}_1$ en $\mathbf{a}_2$ kan vind. Ook die projeksies van $\mathbf{b}$ op die ruimtes loodreg op hierdie ruimtes kan vind.

— Afleiding kan doen van die projeksiematriks P wat alle vektore op A se kolomruimte projekteer, en dit kan toepas.

— Die eienskappe van die projeksiematrikse van die vorm $A(A^TA)^{-1}A^T$ kan aantoon.

— Die projeksiematriks kan vind wat op die ortogonale kompliment van A se kolomruimte projekteer kan vind, en sy eienskappe aantoon.

— Die verwante refleksiematriks uit 'n projeksiematriks kan vind, en sy eienskappe aantoon.

— Die eienskappe van die refleksiematrikse van die vorm $2P - I$ kan aantoon.

— Die verwante refleksiematriks vir 'n spieël kan vind (uit die projeksiematriks op die spieël), en sy eienskappe kan aantoon.

— Probleme met invallende ligstrale op gekromde spieëls (slegs in 2D) kan doen waar refleksiematrikse gebruik word.

PROJECTIONS AND REFLECTIONS

— *Find the projection of* $\mathbf{b}$ *on the line given by* $\mathbf{a}$*, or the projection of* $\mathbf{b}$ *on the plane spanned by* $\mathbf{a}_1$ *and* $\mathbf{a}_2$*. Also, be able to find the projections of* $\mathbf{b}$ *on the spaces perpendicular to these spaces.*

— *Be able to derive the projection matrix* P *that projects all vectors on the column space of* A*, and apply it.*

— *Prove the properties of projection matrices of the form* $A(A^TA)^{-1}A^T$*.*

— *Be able to find the projection matrix that projects on the orthogonal compliment of the column space of* A*, and prove its properties.*

— *Find the corresponding reflection matrix from a projection matrix, and prove its properties.*

— *Be able to prove the properties of a reflection matrix of the form* $2P - I$*.*

— *Find the corresponding reflection matrix for a mirror (from the projection matrix on the mirror) and prove its properties.*

— *Do problems with light beams on curved mirrors (2D only) where reflection matrices are used.*

KLEINSTE-KWADRATE OPLOSSING

— Kan aantoon hoe die kleinste-kwadrate oplossing gevind word as $x = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$, met verduidelikings van wat bedoel word met "kleinste-kwadrate oplossing".

— Die kleinste-kwadrate-oplossing van $A\mathbf{x} \approx \mathbf{b}$ kan vind as $\mathbf{b}$ nie in A se kolomruimte lê nie.

— Beste lyn, of polinoom en/of ander funksie (wat lineêr afhang van die koëffisiënte) deur 'n gegewe stel punte kan vind met behulp van kleinste kwadrate oplossing van oorbepaalde stelsel.

— Moet die algemene formules vir m en c van die "beste" lyn deur 'n aantal punte kan herlei, of soortgelyke formule vir ander krommes (slegs gevalle waar $A^T A$ 'n 2×2-matriks is, kan gevra word).

LEAST SQUARES SOLUTION

— *Show how the least squares solution is found as* $\mathbf{x} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$, *with explainations of what is meant by "least squares solution".*

— *Find the least squares solution of* $A\mathbf{x} \approx \mathbf{b}$ *if* $\mathbf{b}$ *does not lie in the column space of* A.

— *Find the best line, or polynomial and/or other function (that depends linearly on the coefficients) through a given set of points with the help of least squares solution of an overdetermined system.*

— *Must be able to derive the general formulas for* m *and* c *of the "best" line through a number of points, or similar formulas for other curves (only cases where* $A^T A$ *is a* 2×2 *matrix, will be asked).*

ORTOGONALE MATRIKSE EN QR-ONTBINDING

— Eienskappe van ortogonale matrikse ken en kan aantoon: byvoorbeeld $Q^T Q = ..$, $QQ^T = ...$, behoud van lengtes en hoeke. Ook die eienskappe van 'n reghoekige matriks met ortogonale kolomme, $\bar{Q}$ moet aangetoon kan word.

— QR-ontbinding van 'n vierkantige matriks kan doen en 'n vierkantige stelsel daarmee kan oplos.

— Reghoekige $\overline{Q}$R-ontbinding van 'n portretvormige matriks A kan doen en die kleinste-kwadrate-oplossing van die oorbepaalde stelsel geassosieer met A daarmee kan vind.

— Moet ook die projeksiematriks kan vind wat op 'n portretvormige A se kolomruimte projekteer deur van $\overline{Q}$R-ontbinding te gebruik.

ORTHOGONAL MATRICES AND QR-DECOMPOSITION

— *Must know and be able to derive the properties of orthogonal matrices, e.g.* $Q^T Q = ..$, $QQ^T = ...$, *conservation of lengths and angles. This also applies to the properties of a rectangular matrix with orthonormal columns,* $\bar{Q}$.

— *Must be able to do QR-decomposition of a square matrix and be able to find the solution of a square system by using the QR decomposition.*

— *Must be able to do rectangular* $\overline{Q}$*R-decomposition of a portrait shaped matrix* A *and be able to find the least squares solution of the overdetermined system associated with* A *using this* $\overline{Q}$*R decomposition.*

— *Must also be able to find the projection matrix that projects on the column space of a portrait shaped* A *by using the* $\overline{Q}$*R-decomposition of* A.

DIE DETERMINANT

Jy sal nie direk getoets word vir kennis van determinante nie, maar alles wat jy in Wiskunde geleer het (bv. hoe om det van 'n 3×3 matriks te bereken, en eienskappe soos (a) *as daar 'n nul-ry is, is det=0*, (b) *as rye omgeruil word verander det se teken, ens. ...* mag benodig word, dus moet dit geken word).

THE DETERMINANT

You will not be tested directly on knowledge of determinants, but, all that you learned in Maths (e.g. how to calculate det of a 3×3 matrix, as well as properties such as e.g. (a) if there is a zero row, det=0, (b) when two rows are exchanged, det changes sign, etc. ... may be needed, so it must be known).

EIEWAARDES EN EIEVEKTORE

— Eiewaardes en eievektore van gegewe 2×2 en 3×3 matrikse kan vind, en veral weet hoe om dit makliker te vind as een eievektor of een eiewaarde gegee is. Ook die gebruik van $\det(A)$ en $\mathrm{tr}(A)$, kan die vind van eiewaardes vergemaklik.

— Diagonaalvorm van 'n matriks kan vind, d.w.s. $A = S\Lambda S^{-1}$

— As A simmetries is, die spesiale diagonaalvorm met ortogonale matrikse kan vind, $A = Q\Lambda Q^T$, ook as A gelyke eiewaardes het.

— Die verband tussen die som en produk van die eiewaardes met die determinant en spoor van die matriks kan aantoon vir die 2×2 geval.

— ~~Spesiale eienskappe van die eiewaardes en eievektore van *simmetriese* matrikse ken en kan aantoon, bv. eiewaardes is reëel en $(\lambda_k - \lambda_j)\mathbf{x}_k^T\mathbf{x}_j = 0$ en dit kan interpreteer.~~

— Die verband wat die eiewaardes en eievektore van A, A^n, A^{-1} en $A - \alpha I$ met mekaar het ken en kan aantoon.

EIGENVALUES AND EIGENVECTORS

— *Be able to find eigenvalues and eigenvectors of a given 2×2 and 3×3 matrix, especially how to find it easier if one eigenvector or one eigenvalue is given. The use of $\det(A)$ and $tr(A)$ can also simplify the finding of eigenvalues.*

— *Be able to find the diagonal form of a matrix, i.e. $A = S\Lambda S^{-1}$*

— *If A is symmetric, be able to find the special diagonal form with orthogonal matrices, $A = Q\Lambda Q^T$, also if A has equal eigenvalues.*

— *Show the relationship between the sum and product of the eigenvalues, and the determinant and trace of the matrix, for the 2×2 case.*

— ~~*Know and derive special properties of the eigenvectors and eigenvalues of symmetric matrices, e.g. eigenvalues are real and $(\lambda_k - \lambda_j)\mathbf{x}_k^T\mathbf{x}_j = 0$ and be able to interpret it.*~~

— *Know and derive the relationship that the eigenvalues and eigenvectors of A, A^n, A^{-1} and $A - \alpha I$ have with each other.*

ALGEMEEN

— Die volgende terme en begrippe moet verduidelik en korrek gebruik kan word: ortogonale vektore, ortonormale vektore, spil-element, leidende koëffisiënt, ry-bewerking, rang, singulier, onderspan, onafhanklik, basis, vektor-ruimte, projeksie op 'n onderruimte, projeksiematriks, refleksiematiks, komponente in of loodreg op 'n ruimte, oorbepaalde en onderbeplaalde stelsels.

Vrae wat spesiale insig vereis kan gevra word.

GENERAL

— *Must be able to explain and correctly use the following terms and concepts: orthogonal vectors, orthonormal vectors, pivot element, leading coefficient, row operation, rank, singular, span, independent, basis, vector space, projection on a subspace, projection matrix, reflection matrix, components in or perpendicular to a space, under determined and over determined systems.*

Questions which require special insight, may be asked.