

# On a new limit theorem in probability theory (Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités)

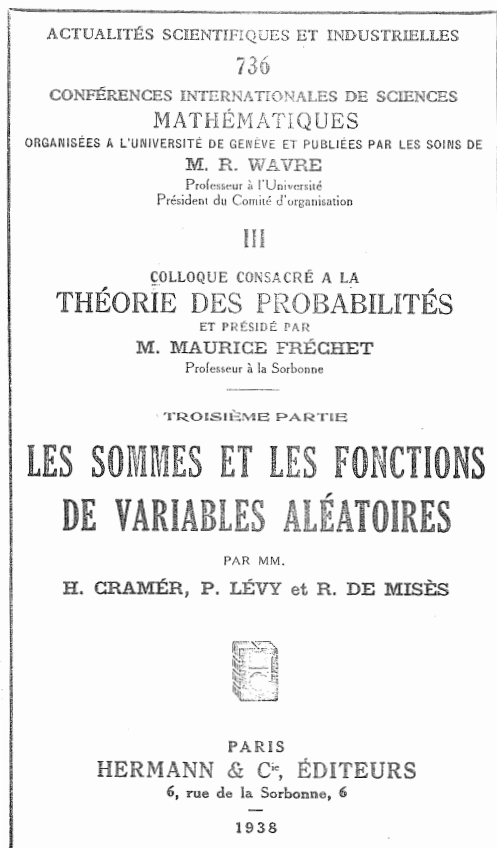
Harald Cramér (1893-1985)  
Stockholm, Sweden

Translated by  
Hugo Touchette  
National Institute for Theoretical Physics (NITheP), Stellenbosch, South Africa

15 March 2018

*Original article:* H. Cramér, Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités, Colloque consacré à la théorie des probabilités, Actualités scientifiques et industrielles 736, 2-23, Hermann & Cie, Paris, 1938.

*Reprinted in:* H. Cramér, *Collected Works*, A. Martin-Löf (Ed.), Vol. II, Springer, Berlin, 1994, p. 895-913.



## SUR UN NOUVEAU THÉORÈME-LIMITE DE LA THÉORIE DES PROBABILITÉS

PAR HARALD CRAMÉR  
(Stockholm)

### CHAPITRE PREMIER

CONSIDÉRONS une suite  $Z_1, Z_2, \dots$  de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même fonction de répartition  $V(x)$ , et telles que

$$(1) \quad E(Z_n) = 0, \quad E(Z_n^2) = \sigma^2 > 0.$$

Désignons par  $W_n(x)$  la fonction de répartition de la somme

$$Z_1 + \dots + Z_n,$$

et par  $F_n(x)$  la fonction de répartition de la variable

$$\frac{Z_1 + \dots + Z_n}{\sigma\sqrt{n}}.$$

On a donc

$$F_n(x) = \text{Prob}(Z_1 + \dots + Z_n \leq \sigma x \sqrt{n})$$

et

$$(2) \quad F_n(x) = W_n(\sigma x \sqrt{n}).$$

D'après le théorème limite classique de LAPLACE-LIAPOUNOFF (dans sa forme moderne précisée par LINDBERBERG et par M. Paul LÉVY) on a alors pour chaque valeur réelle fixe de  $x$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

## Introduction

The following is a translation of Harald Cramér’s article, “On a new limit theorem in probability theory”, published in French in 1938 [7] and deriving what is considered by mathematicians to be the first large deviation result (Theorem 6 in the text). There is no electronic version of Cramér’s article available from Hermann Editions, the publisher of the proceedings in which Cramér’s contribution appears, although [Google Books has a partially-readable version](#). My hope is that this translation will help disseminate this historically important work, 80 years after its publication. The conference held in Geneva in 1937 for which it was written is briefly mentioned by Cramér in his “Personal Recollections” [9] (see Sec. 4.9, p. 528).

I have been actively looking for an English translation of this article, but could not find any, even with help from researchers familiar with it. The article is reprinted in volume II of Cramér’s *Collected Works* [10], but in the original French. Moreover, there happens to be a Russian version in *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* [8], translated in 1944 by none other than Gnedenko, but it is not translated in English in the *Russian Mathematical Surveys*, the latter having started only in 1960. Finally, the bibliographies and obituaries of Cramér I could find [3, 2, 15] list only the French 1938 article. Needless to say, I would be grateful if someone could point an English translation to me.

## Context

The importance of Cramér’s article has been discussed before, notably by Le Cam [6, Sec. 4], so I decided not to provide a commentary myself. His results are also now standard in large deviation theory, and are well explained, for example, in the textbooks of Dembo and Zeitouni [11] and of den Hollander [12], in addition to several reviews [13, 1, 18, 17].

I have added some notes in the English text (with the double brackets `[[ ]]`) only to highlight some important parts and results, and to comment on minor translation choices I have made. A brief synopsis of the article and some sources about Cramér’s life and work are also included in the next sections. My feeling is that the importance of Cramér’s article speaks, in any case, for itself. Like many classics, it should be read in its original version, in the voice of the period in which it was written.

I will only say, to put some historical context, that Cramér’s results were definitively novel (Blom [2] calls them “pioneering”) and somewhat out of the fashion of the time in probability theory for trying to go beyond the central limit theorem [9, 5]. The conference in Geneva, presided by Fréchet, where these results were presented is also considered as a turning point or even an “epiphany”<sup>1</sup> in the history

of probability theory, as a more rigorous approach was being adopted to study more abstract problems [4]. This probably explains altogether why Cramér goes into such length in his first two chapters to explain the new large deviation problem that he wants to solve, how it relates to the central limit theorem, and why new methods going beyond that theorem are needed for tackling the problem.

It is clear that Cramér’s inspiration for this problem came from his own work on the central limit theorem [9, 5, 6] and, more importantly, from his experience of insurance and actuarial mathematics, on which he worked all his life [9, 16]. The problem, as he explains in his recollections [9, p. 514], is that

for the risk problems in which I was interested, it was not enough to know that a certain probability distribution [for a sum of random variables] was approximately normal; it was necessary to have an idea of the magnitude of the error involved in replacing the distribution under consideration by the normal one.

In other words, Cramér was looking for “corrections” to the central limit theorem, which is what he presents in his 1938 article. He considers a sum of  $n$  independent and identically distributed random variables, representing for an insurance company a sum of  $n$  claims, and tries to obtain an estimate of the probability distribution for “large” sum values that scale with  $n$ , as opposed to  $\sqrt{n}$ , which is the “normal” scaling considered in the central limit theorem. This is the large deviation problem, which he solves by providing (in Theorem 6) an asymptotic expansion of the distribution valid as  $n \rightarrow \infty$ , whose dominant term is a decaying exponential in  $n$ .

The importance of this simple result is now clear, 80 years after its publication, and deserves indeed to be called “pioneering”, having led to the development of a whole theory of large deviations, which finds applications in fields as diverse as queueing theory, information theory, statistical estimation, hypothesis testing, and statistical physics [11, 12, 17]. Many of the techniques used by Cramér in 1938 are also now standard in probability theory. They include, in particular, the Esscher transform [14], a change of measure widely used in large deviation theory, statistics and rare event simulations under the name of exponential family, exponential tilting or Cramér transform. The dominant exponential term appearing in the asymptotic expansion found by Cramér is also the cornerstone of large deviation theory, referred to as the large deviation principle. The exponent appearing in that term is called the rate function or the Cramér function.

The importance of Cramér’s article can also be measured, in the end, by the time it took for researchers to continue what Cramér had started. Results on large deviations began to appear after 1938 only around the 1960s, with works from

<sup>1</sup>Laurent Mazliak, private communication, 2018.

Linnik, Petrov, and Sanov, to mention a few (see [6] for references). These results, however, do not form any general theory, but concern themselves with different sums of independent random variables or different conditions for results similar to Cramér’s to apply. The starting point of the theory of large deviations, as we know it today, is considered to be the work of Donsker and Varadhan (see [18] for references) published in the 1970s on large deviations of Markov processes. From that time, and especially from the 1980s, the theory has grown to become one of the most active subjects in probability theory and in statistical physics.

In physics, Boltzmann is credited for having derived in 1877 the first large deviation result [13]. However, there is no doubt that it is Cramér who initiated the mathematical study of large deviations.

## Acknowledgments

My thanks go to Arnaud Guyader for encouragements during the project and for carefully proofreading the translation. All remaining errors are, of course, mine. I also thank Richard S. Ellis for giving me a first copy of Cramér’s article, Laurent Mazliak for useful comments and references about the 1937 Geneva conference, and Raphaël Chetrite for offering to participate in the project and for his encouragements.

## Copyright

I wrote to Éditions Hermann in Paris to get permission for this translation, to post it on the arXiv and, ultimately, to get permission to publish it somewhere. I first sent them an email in 2012 and then wrote a letter in 2013, but did not receive an answer to either.

I would be happy to be contacted by the publisher, should they see the translation and have any qualms with it. My understanding is that, although the paper is 80 years old, only 33 years have elapsed since Cramér’s death in 1985, which is below the 50 years needed for his work to go into the public domain. I do not claim copyright for the translation and nor does the arXiv under its normal license.

## Synopsis

- Chapter I:
  - Problem definition: Find the distribution of a sum of IID random variables with common cumulative distribution function (CDF)  $V(x)$ .
  - Explains the central limit theorem (CLT) after Eq. (2).
  - Defines the large deviation problem in the paragraphs coming after Eq. (4) up to Condition A.

- Discusses whether the CLT can be used to solve this problem; the answer is no.
- Defines Condition A, requiring the existence of the generating function of the CDF  $V(x)$ . This condition is fundamental in large deviation theory and is now referred to as Cramér’s condition.
- Chapter II:
  - Introduces the change of CDF, referred to as the Esscher transform, underlying the results to be discussed after.
  - Relates the original CDF  $V(x)$  and transformed CDF  $\tilde{V}(x)$  (relations between the ‘non-bar’ and ‘bar’ quantities).
  - Relates, in particular, the characteristic functions of the original and transformed CDFs; see Eqs. (9) and (10).
- Chapter III:
  - Studies the cumulants and give CLT-type error estimates.
  - Theorem 1: Error estimate for the CLT, based on the scaling  $x \sim \sqrt{n}/\log n$ .
  - Theorem 2: Similar error estimate for  $x \sim n^{1/6}$ .
  - Theorem 3: Rewriting of Theorem 2, essentially.
- Chapter IV:
  - Brief discussion of the binomial case. Not essential.
  - Discusses relations with other results of Khintchine, Levy, etc.
- Chapter V (main chapter):
  - Defines Condition B needed to get rid of the  $\log n$  term in the CLT error estimates. This condition seems unnecessary now in view of more refined results published after 1938; see [6, Sec. 4].
  - Theorem 5: Refinement of Theorems 1-3 in which the log term is omitted to consider the scaling  $x \sim \sqrt{n}$ .
  - Theorem 6: Large deviation result for the scaling  $x \sim n$ , coming from the  $\sqrt{n}$  term in  $F_n(x)$ . The “rate exponent”  $\alpha$  is the Legendre transform of the cumulant function; see Eqs. (27) and (29). This is what is referred now to as Cramér’s Theorem. Condition B does not appear in the modern form of that theorem.
- Chapter VI:
  - Studies continuous-time (process) generalizations.

## More information

- Biography: see [Wikipedia](#) and references therein.
- Personal recollections of Cramér around the history of probability theory (from about 1920 to 1970), the Swedish school of probability theory, actuarial mathematics, and his own work: [9].
- Similar recollections compiled by Wegman: [19].
- Complete bibliography of Cramér: [3].
- Collected works of Cramér: [10].
- Obituary notices: [2, 15].
- Pictures of Cramér from the [Dynkin library](#).
- A short audio clip from [Dynkin's audio collection](#).

## References

- [1] A. Amann and H. Atmanspacher. [Introductory remarks on large deviation statistics](#). *J. Sci. Exploration*, 13:639–664, 1999.
- [2] G. Blom. [Harald Cramer 1893-1985](#). *Ann. Statist.*, 15(4):1335–1350, 1987.
- [3] G. Blom and B. Matérn. [Bibliography: Publications of Harald Cramér](#). *Scand. Actuarial J.*, pages 1–10, 1984.
- [4] M.-C. Bustamente, M. Cléry, and L. Mazliak. [Le traité du calcul des probabilités et de ses applications: Étendue et limites d'un projet borélien de grande envergure \(1921-1939\)](#). *North-West Eur. J. Math.*, 1:85–123, 2015.
- [5] L. Le Cam. [The Central Limit Theorem around 1935](#). *Stat. Sci.*, 1(1):78–91, 1986.
- [6] L. Le Cam. [Harald Cramer and sums of independent random variables](#). Technical Report 103, Univ. California Berkeley, 1987.
- [7] H. Cramér. [Sur un nouveau théorème limite dans la théorie des probabilités](#). In *Colloque consacré à la théorie des probabilités*, volume 736, Paris, 1938, pages 2–23. Hermann.
- [8] H. Cramér. [On a new limit theorem of the theory of probability](#). *Uspekhi Mat. Nauk*, (10):166–178, 1944.
- [9] H. Cramér. [Half a century with probability theory: Some personal recollections](#). *Ann. Probab.*, 4(4):509–546, 1976.
- [10] H. Cramér. *Collected Works*. Springer, New York, 1994.
- [11] A. Dembo and O. Zeitouni. *Large Deviations Techniques and Applications*. 2nd edition, Springer, New York, 1998.
- [12] F. den Hollander. *Large Deviations*. Fields Institute Monograph. AMS, Providence, 2000.
- [13] R. S. Ellis. [The theory of large deviations: From Boltzmann's 1877 calculation to equilibrium macrostates in 2D turbulence](#). *Physica D*, 133:106–136, 1999.
- [14] F. Esscher. [On the probability function in the collective theory of risk](#). *Scand. Actuarial J.*, (3):175–195, 1932.
- [15] M. R. Leadbetter. [Harald Cramér, 1893-1985](#). *Int. Stat. Rev.*, 56(1):89–97, 1988.
- [16] A. Martin-Löf. *Harald Cramér and Insurance Mathematics*, chapter 2, pages 7–14. Springer, New York, 2014.
- [17] H. Touchette. [The large deviation approach to statistical mechanics](#). *Phys. Rep.*, 478(1-3):1–69, 2009.
- [18] S. R. S. Varadhan. [Large deviations](#). *Ann. Probab.*, 36(2):397–419, 2008.
- [19] E. J. Wegman. [Some personal recollections of Harald Cramer on the development of statistics and probability](#). *Stat. Sci.*, 1(4):528–535, 1986.

## Chapitre premier

Considérons une suite  $Z_1, Z_2, \dots$  de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même fonction de répartition  $V(x)$ , et telles que

$$E(Z_n) = 0, \quad E(Z_n^2) = \sigma^2 > 0. \quad (1)$$

Désignons par  $W_n(x)$  la fonction de répartition de la somme

$$Z_1 + \dots + Z_n,$$

et par  $F_n(x)$  la fonction de répartition de la variable

$$\frac{Z_1 + \dots + Z_n}{\sigma\sqrt{n}}.$$

On a donc

$$F_n(x) = \text{Prob}(Z_1 + \dots + Z_n \leq \sigma x\sqrt{n})$$

et

$$F_n(x) = W_n(\sigma x\sqrt{n}). \quad (2)$$

D'après le théorème limite classique de Laplace-Liapounoff (dans sa forme moderne précisée par Lindeberg et par M. Paul Lévy) on a alors pour chaque valeur réelle fixe de  $x$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (3)$$

Par ce théorème, on a donc une expression asymptotique (pour  $n \rightarrow \infty$ ) de la probabilité  $F_n(x)$  de l'inégalité

$$Z_1 + \dots + Z_n \leq \sigma x\sqrt{n}$$

ou, ce qui revient au même, de la probabilité  $1 - F_n(x)$  de l'inégalité

$$Z_1 + \dots + Z_n > \sigma x\sqrt{n}$$

$x$  étant toujours un nombre réel *indépendant* de  $n$ .

Il est alors naturel de se demander ce que deviennent ces probabilités *lorsque  $x$  peut varier avec  $n$ , en tendant vers  $+\infty$  ou vers  $-\infty$  quand  $n$  croît indéfiniment.*

Dans ces conditions, la relation (3) ne donne que le résultat évident

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{quand } x \rightarrow +\infty, \\ 0 & \text{ " } x \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

qui exprime seulement que  $F_n(x)$  tend vers les mêmes limites que  $\Phi(x)$  lorsque  $\rightarrow \pm\infty$ .

Pour savoir si l'équivalence asymptotique de  $F_n(x)$  et  $\Phi(x)$  subsiste dans les conditions indiquées, on pourrait se proposer d'étudier les rapports

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} \quad \text{pour } x \rightarrow +\infty, \quad (4a)$$

## First chapter

Consider a sequence  $Z_1, Z_2, \dots$  of independent random variables having the same cumulative distribution function [1]  $V(x)$  and such that

$$E(Z_n) = 0, \quad E(Z_n^2) = \sigma^2 > 0. \quad (1)$$

Denote by  $W_n(x)$  the cumulative distribution function of the sum

$$Z_1 + \dots + Z_n,$$

and by  $F_n(x)$  the cumulative distribution function of the variable

$$\frac{Z_1 + \dots + Z_n}{\sigma\sqrt{n}}.$$

We [2] thus have

$$F_n(x) = \text{Prob}(Z_1 + \dots + Z_n \leq \sigma x\sqrt{n})$$

and

$$F_n(x) = W_n(\sigma x\sqrt{n}). \quad (2)$$

Following the classical limit theorem of Laplace-Lyapunov [3] (in its modern version specified by Lindeberg and by Paul Lévy) we thus have for each real value  $x$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (3)$$

From this theorem [4], we thus have an asymptotic expression (for  $n \rightarrow \infty$ ) for the probability  $F_n(x)$  of the inequality

$$Z_1 + \dots + Z_n \leq \sigma x\sqrt{n}$$

or, which amounts to the same, for the probability  $1 - F_n(x)$  of the inequality

$$Z_1 + \dots + Z_n > \sigma x\sqrt{n}$$

$x$  being as before a real number *independent* of  $n$ .

It is thus natural to ask what happens of these probabilities *when  $x$  can vary with  $n$ , going to  $+\infty$  or to  $-\infty$  when  $n$  grows indefinitely.*

In these conditions, Relation (3) only gives the evident result

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{when } x \rightarrow +\infty, \\ 0 & \text{ " } x \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

which expresses only that  $F_n(x)$  converges to the same limits as  $\Phi(x)$  when  $\rightarrow \pm\infty$ .

To see whether the asymptotic equivalence of  $F_n(x)$  and  $\Phi(x)$  remains under the mentioned conditions indicated, we could propose to study the ratios

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} \quad \text{when } x \rightarrow +\infty, \quad (4a)$$



et

$$\frac{F_n(x)}{\Phi(x)} \text{ pour } x \rightarrow -\infty. \quad (4b)$$

Si  $x$  est indépendant de  $n$ , il suit de (3) que ces rapports tendent tous les deux vers l'unité lorsque  $n$  tend vers l'infini ; il s'agit maintenant de savoir ce qui arrive quand  $x$  devient infini avec  $n$ .

On sait que le théorème de Liapounoff fournit, sous certaines conditions, une borne supérieure du module  $|F_n(x) - \Phi(x)|$  qui est du même ordre de grandeur que  $\frac{\log n}{\sqrt{n}}$  (voir le chap. III). Quand ce théorème est applicable, on trouve sans difficulté que les rapports (4) tendent encore vers l'unité lorsque  $|x|$  reste inférieur à  $(\frac{1}{2} - \epsilon)\sqrt{\log n}$ , où  $\epsilon > 0$ . Cependant ce résultat semble bien insuffisant, notre problème étant d'étudier le comportement des rapports (4) dans un domaine beaucoup plus étendu, par exemple pour des valeurs de  $|x|$  qui sont du même ordre de grandeur qu'une puissance de  $n$ .

Avant d'aborder ce problème, observons qu'on ne peut guère espérer *a priori* d'obtenir des expressions asymptotiques à la fois simples et générales qu'en se bornant aux valeurs de  $x$  qui sont de la forme  $o(\sqrt{n})$ . En effet, la fonction de répartition  $V(x)$ , qui représente les données du problème, peut être choisie de manière que toute sa variation reste comprise dans un intervalle fini  $(-\mu\sigma, \mu\sigma)$ . Pour la fonction  $F_n(x)$ , toute la variation sera alors comprise dans l'intervalle  $(-\mu\sqrt{n}, \mu\sqrt{n})$ , ce qui montre que les rapports (4) s'annuleront identiquement pour  $x > \mu\sqrt{n}$  et pour  $x < -\mu\sqrt{n}$  respectivement.

Dans ce qui va suivre, nous allons étudier le comportement asymptotique des rapports (4) en imposant toujours à la fonction  $V(x)$  la *condition A* qui va être formulée à l'instant, et en supposant  $x$  de la forme  $o(\frac{\sqrt{n}}{\log n})$ . On verra cependant plus tard (Chap. V) que, si la fonction  $V(x)$  satisfait à une certaine condition additionnelle *B*, on peut même considérer les valeurs de  $x$  qui sont du même ordre de grandeur que  $\sqrt{n}$ .

CONDITION A. *Il existe un nombre  $A > 0$  tel que l'intégrale*

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} e^{hy} dV(y) \quad (5)$$

converge pour  $|h| < A$ .

En supposant que cette condition soit satisfaite, nous allons établir entre autres le résultat fondamental suivant. Pour  $x > 1$ ,  $x = o(\frac{\sqrt{n}}{\log n})$ , on a

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} = e^{\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)} \left[ 1 + O\left(\frac{x \log n}{\sqrt{n}}\right) \right],$$

$$\frac{F_n(-x)}{\Phi(-x)} = e^{-\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda\left(-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)} \left[ 1 + O\left(\frac{x \log n}{\sqrt{n}}\right) \right],$$

où

$$\lambda(z) = \sum_0^{\infty} c_\nu z^\nu$$

and

$$\frac{F_n(x)}{\Phi(x)} \text{ when } x \rightarrow -\infty. \quad (4b)$$

If  $x$  is independent of  $n$ , it follows from (3) that these ratios both converge to 1 when  $n$  goes to infinity; it now remains to understand what happens when  $x$  becomes infinite with  $n$ .

We know that the theorem of Lyapunov provides, under certain conditions, an upper bound on the modulus  $|F_n(x) - \Phi(x)|$  which is of the same order of magnitude as  $\frac{\log n}{\sqrt{n}}$  (see Chap. III). When this theorem is applicable, we find without difficulty that the ratios (4) still converge to 1 when  $|x|$  remains below  $(\frac{1}{2} - \epsilon)\sqrt{\log n}$ , where  $\epsilon > 0$ . However, this result seems well insufficient, our problem being to study the behaviour of the ratios (4) in a much larger domain, for example, for values of  $|x|$  that are of the same order of magnitude as a power of  $n$ . [[5]]

Before tackling this problem, observe that we can hardly hope *a priori* to obtain asymptotic expressions that are both simple and general only by considering values of  $x$  of the form  $o(\sqrt{n})$ . Indeed, the cumulative distribution function  $V(x)$ , which represents the data of the problem, can be chosen such that its variation is contained in a finite interval  $(\mu\sigma, \mu\sigma)$ . For the function  $F_n(x)$ , all its variation will thus be contained in the interval  $(-\mu\sqrt{n}, \mu\sqrt{n})$ , which shows that the ratios (4) will cancel identically for  $x > \mu\sqrt{n}$  and for  $x < -\mu\sqrt{n}$ , respectively.

In what follows, we shall study the asymptotic behavior of the ratios (4) by always imposing to the function  $V(x)$  the *condition A* formulated just now, and by assuming  $x$  of the form  $o(\frac{\sqrt{n}}{\log n})$ . However, we will see later (Chap. V) that, if the function  $V(x)$  satisfies a certain additional condition *B*, we can even consider values of  $x$  that are of the same order of magnitude as  $\sqrt{n}$ . [[6]]

CONDITION A. *There exists a number  $A > 0$  such that the integral*

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} e^{hy} dV(y) \quad (5)$$

converges for  $|h| < A$ . [[7]]

Assuming that this condition is satisfied, we shall establish the following fundamental results among others. For  $x > 1$ ,  $x = o(\frac{\sqrt{n}}{\log n})$ , we have

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} = e^{\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)} \left[ 1 + O\left(\frac{x \log n}{\sqrt{n}}\right) \right],$$

$$\frac{F_n(-x)}{\Phi(-x)} = e^{-\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda\left(-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)} \left[ 1 + O\left(\frac{x \log n}{\sqrt{n}}\right) \right],$$

where

$$\lambda(z) = \sum_0^{\infty} c_\nu z^\nu$$

est une série de puissances convergente pour toute valeur suffisamment petite de  $|z|$ .

Ce théorème, dont nous déduirons plusieurs corollaires importants, sera démontré dans le chapitre III. Par l'introduction de la condition additionnelle B, nous parviendrons dans le chapitre V à des résultats encore plus précis. Enfin, dans le dernier chapitre, nous donnerons des théorèmes analogues aux précédents pour le cas d'un processus stochastique homogène.

## Chapitre II

Supposons que la condition A soit satisfaite et choisissons un nombre réel  $h$  situé dans le domaine de convergence de l'intégrale (5). On s'assure facilement que la fonction <sup>(2)</sup>

$$\bar{V}(x) = \frac{1}{R} \int_{-\infty}^x e^{hy} dV(y) \quad (6)$$

possède toutes les propriétés essentielles d'une fonction de répartition.

Considérons donc une suite  $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \dots$  de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même fonction de répartition  $\bar{V}(x)$ . Posons

$$E(\bar{Z}_n) = \bar{m}, \quad E(\bar{Z}_n^2) = \bar{\sigma}^2. \quad (7)$$

Désignons encore par  $\bar{W}(x)$  la fonction de répartition de la somme

$$\bar{Z}_1 + \dots + \bar{Z}_n,$$

et par  $\bar{F}_n(x)$  la fonction de répartition de la variable

$$\frac{\bar{Z}_1 + \dots + \bar{Z}_n - \bar{m}n}{\bar{\sigma}\sqrt{n}}.$$

On a alors

$$\bar{F}_n(x) = \bar{W}_n(\bar{m}n + \bar{\sigma}x\sqrt{n}). \quad (8)$$

Le but de ce chapitre est d'établir une relation entre les fonctions  $F_n(x)$  and  $\bar{F}_n(x)$  définies par (2) et (8) respectivement.

Introduisons les fonctions caractéristiques  $\nu(z)$ ,  $\bar{\nu}(z)$ ,  $w_n(z)$  et  $\bar{w}_n(z)$ , où

$$\nu(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izy} dV(y),$$

tandis que  $\bar{\nu}(z)$ ,  $w_n(z)$  et  $\bar{w}_n(z)$  sont définies par des expressions analogues où figurent les fonctions  $\bar{V}$ ,  $W_n$  et  $\bar{W}_n$ , respectivement. Considérons ici  $z$  comme une variable complexe

<sup>2</sup>Une transformation analogue a été employée par F. Esscher : On the probability function in the collective theory of risk, *Skandinavisk Akzuarietidskrift*, 15 (1932), p. 175.

is a power series convergent for small enough values of  $|z|$ .

This theorem, from which we will deduce many important corollaries, will be proved in Chap. III. By introducing the additional condition B, we will reach in Chap. V even more precise results. Finally, in the last chapter, we shall give analogous theorems for the case of a homogeneous stochastic process. [[8]]

## Chapter II

Suppose that Condition A is satisfied and choose a real number  $h$  in the domain of convergence of the integral (5). We can easily verify that the function <sup>(2)</sup> [[9]]

$$\bar{V}(x) = \frac{1}{R} \int_{-\infty}^x e^{hy} dV(y) \quad (6)$$

possesses all the essential properties of a cumulative distribution function. [[10]]

Consider then a sequence  $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \dots$  of independent random variables all having the same cumulative distribution function  $\bar{V}(x)$ . Let [[11]]

$$E(\bar{Z}_n) = \bar{m}, \quad E(\bar{Z}_n^2) = \bar{\sigma}^2. \quad (7)$$

Denote further by  $\bar{W}_n(x)$  the cumulative distribution function of the sum

$$\bar{Z}_1 + \dots + \bar{Z}_n,$$

and by  $\bar{F}_n(x)$  the cumulative distribution function of the variable

$$\frac{\bar{Z}_1 + \dots + \bar{Z}_n - \bar{m}n}{\bar{\sigma}\sqrt{n}}.$$

Hence we have

$$\bar{F}_n(x) = \bar{W}_n(\bar{m}n + \bar{\sigma}x\sqrt{n}). \quad (8)$$

The goal of this chapter is to establish a relation between the functions  $F_n(x)$  and  $\bar{F}_n(x)$  defined by (2) and (8), respectively.

Let us introduce the characteristic functions  $\nu(z)$ ,  $\bar{\nu}(z)$ ,  $w_n(z)$  and  $\bar{w}_n(z)$ , where

$$\nu(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izy} dV(y),$$

while  $\bar{\nu}(z)$ ,  $w_n(z)$  and  $\bar{w}_n(z)$  are defined by analogous expressions involving the functions  $\bar{V}$ ,  $W_n$  and  $\bar{W}_n$ , respectively.

<sup>2</sup>An analogous transformation has been used by F. Esscher: On the probability function in the collective theory of risk, *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 15 (1932), p. 175.

et posons  $z = \xi + i\eta$ . D'après la condition A et la relation (6), la fonction  $v(z)$  est holomorphe à l'intérieur de la bande  $|\eta| < A$ , et l'on a

$$R = v(-ih),$$

$$\bar{v}(z) = \frac{1}{R}v(z - ih).$$

D'autre part, les variables  $Z_n$  ainsi que les variables  $\bar{Z}_n$  étant mutuellement indépendantes, il est bien connu qu'on a

$$w_n(z) = [v(z)]^n,$$

$$\bar{w}_n(z) = [\bar{v}(z)]^n,$$

d'où

$$\bar{w}_n(z) = \frac{1}{R^n}w_n(z - ih), \quad (9)$$

les deux membres de cette dernière relation étant des fonctions holomorphes de  $z$  à l'intérieur de la bande  $|\eta - h| < A$ . En posant ici  $z = ih$ , il vient

$$\frac{1}{R^n} = \bar{w}_n(ih) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-hy} d\bar{W}_n(y).$$

Remplaçons dans (9)  $z$  par  $z + ih$ ; nous avons alors

$$w_n(z) = R^n \bar{w}_n(z + ih) = \frac{\bar{w}_n(z + ih)}{\bar{w}_n(ih)}. \quad (10)$$

Or cette relation équivaut à

$$W_n(x) = R^n \int_{-\infty}^x e^{-hy} d\bar{W}_n(y). \quad (11)$$

En effet, les deux membres de (11) sont des fonctions de répartition en  $x$ , dont les fonctions caractéristiques, comme on le voit sans difficulté, sont égales à  $w_n(z)$  et  $R^n \bar{w}_n(z + ih)$  respectivement. Donc, d'après (10), ces fonctions de répartition sont identiques.

En introduisant dans (11) les fonctions  $F_n(x)$  et  $\bar{F}_n(x)$  définies par (2) et (8), on obtient au moyen d'une substitution simple

$$F_n(x) = R^n e^{-h\bar{m}n} \int_{-\infty}^{\frac{\sigma x - \bar{m}\sqrt{n}}{\sigma}} e^{-h\bar{\sigma}\sqrt{n}y} d\bar{F}_n(y). \quad (12a)$$

Si on fait ici tendre  $x$  vers l'infini positif on obtient de plus, en faisant la différence,

$$1 - F_n(x) = R^n e^{-h\bar{m}n} \int_{\frac{\sigma x - \bar{m}\sqrt{n}}{\sigma}}^{\infty} e^{-h\bar{\sigma}\sqrt{n}y} d\bar{F}_n(y). \quad (12b)$$

Les équations (12a) et (12b) expriment la relation entre  $F_n(x)$  et  $\bar{F}_n(x)$  que nous nous sommes proposés d'établir.

Or, d'après la définition (8) de  $\bar{F}_n(x)$ , le théorème de Laplace-Liapounoff peut encore être appliqué à cette fonction.

Consider  $z$  here as a complex variable and let  $z = \xi + i\eta$ . Following Condition A and the relation (6), the function  $v(z)$  is holomorphic inside the strip  $|\eta| < A$ , and we have

$$R = v(-ih),$$

$$\bar{v}(z) = \frac{1}{R}v(z - ih).$$

On the other hand, the variables  $Z_n$  as well as the variables  $\bar{Z}_n$  being mutually independent, it is well known that we have

$$w_n(z) = [v(z)]^n,$$

$$\bar{w}_n(z) = [\bar{v}(z)]^n,$$

whence

$$\bar{w}_n(z) = \frac{1}{R^n}w_n(z - ih), \quad (9)$$

the two sides of this last relation being holomorphic functions of  $z$  inside the strip  $|\eta - h| < A$ . Letting here  $z = ih$ , it follows

$$\frac{1}{R^n} = \bar{w}_n(ih) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-hy} d\bar{W}_n(y).$$

Let us replace in (9)  $z$  by  $z + ih$ , we then have

$$w_n(z) = R^n \bar{w}_n(z + ih) = \frac{\bar{w}_n(z + ih)}{\bar{w}_n(ih)}. \quad (10)$$

This relation is equivalent to

$$W_n(x) = R^n \int_{-\infty}^x e^{-hy} d\bar{W}_n(y). \quad (11)$$

Indeed, the two members of (11) are cumulative distribution function in  $x$ , whose characteristic functions, as we can easily see, are equal to  $w_n(z)$  and  $R^n \bar{w}_n(z + ih)$ , respectively. Therefore from (10), these cumulative distribution functions are identical.

Introducing in (11) the functions  $F_n(x)$  and  $\bar{F}_n(x)$  defined by (2) and (8), we obtain by means of a simple substitution

$$F_n(x) = R^n e^{-h\bar{m}n} \int_{-\infty}^{\frac{\sigma x - \bar{m}\sqrt{n}}{\sigma}} e^{-h\bar{\sigma}\sqrt{n}y} d\bar{F}_n(y). \quad (12a)$$

If we let here  $x$  converge to positive infinity, we also obtain, by taking the difference,

$$1 - F_n(x) = R^n e^{-h\bar{m}n} \int_{\frac{\sigma x - \bar{m}\sqrt{n}}{\sigma}}^{\infty} e^{-h\bar{\sigma}\sqrt{n}y} d\bar{F}_n(y). \quad (12b)$$

The equations (12a) and (12b) express the relation between  $F_n(x)$  and  $\bar{F}_n(x)$ , which we proposed to study.

However, following the definition (8) of  $\bar{F}_n(x)$ , the theorem of Laplace-Lyapunov can again be applied to this function.



Ce théorème nous apprend que  $\bar{F}_n(x)$  tend, pour  $n \rightarrow \infty$ , vers la fonction de répartition normale  $\Phi(x)$  définie par (3). En remplaçant dans (12a) et (12b)  $\bar{F}_n(y)$  par  $\Phi(y)$ , on doit donc obtenir des expressions approchées de la fonction  $F_n(x)$ . C'est en précisant ce raisonnement que nous parviendrons, dans les chapitres suivants, à des résultats nouveaux concernant l'allure asymptotique de  $F_n(x)$ .

## Chapitre III

Considérons maintenant  $h$  comme une variable réelle, et posons

$$\log R = \log \int_{-\infty}^{\infty} e^{hy} dV(y) = \sum_2^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\nu!} h^\nu, \quad (13)$$

où, d'après la condition A, la série converge certainement, pour toute valeur suffisamment petite de  $|h|$ . Les coefficients  $\gamma_\nu$  sont les semi-invariants de la fonction de répartition  $V(x)$ , et il suit de (1) qu'on a  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = \sigma^2$ . Par (6) et (7), on a de plus

$$\bar{m} = \frac{d}{dh} \log R = \sum_2^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{(\nu-1)!} h^{\nu-1}, \quad (14)$$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{d\bar{m}}{dh} = \sum_2^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{(\nu-1)!} h^{\nu-2}. \quad (15)$$

Dans le voisinage du point  $h = 0$ ,  $\bar{m}$  est donc une fonction continue et toujours croissante de la variable réelle  $h$ .

Soit maintenant  $z$  un nombre réel donné. L'équation

$$\sigma z = \bar{m} = \sum_2^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{(\nu-1)!} h^{\nu-1} \quad (16)$$

admet alors, pour tout  $z$  de module suffisamment petit, une seule racine réelle  $h$ , qui a le même signe que  $z$  et tend vers zéro avec  $z$ . Réciproquement, cette racine  $h$  peut être développée en série de puissances de  $z$ , convergente pour tout  $z$  de module suffisamment petit. Les premiers termes de ce développement sont

$$h = \frac{z}{\sigma} - \frac{\gamma_3}{2\sigma^4} z^2 - \frac{\sigma^2 \gamma_4 - 3\gamma_3^2}{6\sigma^7} z^3 + \dots \quad (17)$$

De (13) et (14) on tire

$$h\bar{m} - \log R = \sum_2^{\infty} \frac{(\nu-1)\gamma_\nu}{\nu!} h^\nu.$$

En remplaçant ici  $h$  par son développement (17), il vient

$$h\bar{m} - \log R = \frac{1}{2} z^2 - \frac{\gamma_3}{6\sigma^3} z^3 - \frac{\sigma^2 \gamma_4 - 3\gamma_3^2}{24\sigma^6} z^4 + \dots$$

This theorem tells us that  $\bar{F}_n(x)$  converges [tends], for  $n \rightarrow \infty$ , to the normal cumulative distribution function  $\Phi(x)$  defined by (3). Replacing in (12a) and (12b)  $\bar{F}_n(y)$  by  $\Phi(y)$ , we must then obtain expressions close to the function  $F_n(x)$ . It is by making this reasoning more precise that we will reach, in the following chapters, new results concerning the asymptotic form of  $F_n(x)$ .

## Chapter III

Consider now  $h$  to be a real variable and let

$$\log R = \log \int_{-\infty}^{\infty} e^{hy} dV(y) = \sum_2^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\nu!} h^\nu, \quad (13)$$

where, following Condition A, the series converges certainly for all small enough value  $|h|$ . The coefficients  $\gamma_\nu$  are the semi-invariants [[12]] of the cumulative distribution function  $V(x)$  and it follows from (1) that we have  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = \sigma^2$ . From (6) and (7), we also have

$$\bar{m} = \frac{d}{dh} \log R = \sum_2^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{(\nu-1)!} h^{\nu-1}, \quad (14)$$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{d\bar{m}}{dh} = \sum_2^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{(\nu-1)!} h^{\nu-2}. \quad (15)$$

In the neighborhood of  $h = 0$ ,  $\bar{m}$  is thus a continuous and always increasing function of the real variable  $h$ .

Now, let  $z$  a real number. The equation

$$\sigma z = \bar{m} = \sum_2^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{(\nu-1)!} h^{\nu-1} \quad (16)$$

then admits, for all  $z$  of modulus sufficiently small, a unique root  $h$ , which has the same sign as  $z$  and converges to zero with  $z$ . Conversely, this root  $h$  can be expanded in a power series in  $z$ , which converges for all  $x$  of modulus sufficiently small. The first terms of this series are

$$h = \frac{z}{\sigma} - \frac{\gamma_3}{2\sigma^4} z^2 - \frac{\sigma^2 \gamma_4 - 3\gamma_3^2}{6\sigma^7} z^3 + \dots \quad (17)$$

From (13) and (14) we get

$$h\bar{m} - \log R = \sum_2^{\infty} \frac{(\nu-1)\gamma_\nu}{\nu!} h^\nu.$$

Replacing here  $h$  by its expansion (17), it follows

$$h\bar{m} - \log R = \frac{1}{2} z^2 - \frac{\gamma_3}{6\sigma^3} z^3 - \frac{\sigma^2 \gamma_4 - 3\gamma_3^2}{24\sigma^6} z^4 + \dots$$

Donc, en observant que  $z^2 = (\frac{\bar{m}}{\sigma})^2$  et en posant

$$\frac{\bar{m}^2}{2\sigma^2} - h\bar{m} + \log R = z^3 \lambda(z), \quad (18)$$

$\lambda(z)$  admet un développement en série de puissances

$$\lambda(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \quad (19)$$

convergent pour tout  $z$  de module suffisamment petit, et l'on a

$$c_0 = \frac{\gamma_3}{6\sigma^3}, \quad c_1 = \frac{\sigma^2 \gamma_4 - 3\gamma_3^2}{24\sigma^6}, \dots \quad (20)$$

Ceci posé, nous pouvons énoncer notre théorème fondamental de la manière suivante.

**THÉORÈME 1.** *Supposons que la condition A soit satisfaite. Soit  $x$  un nombre réel qui peut dépendre de  $n$ , tel que  $x > 1$  et  $x = o(\frac{\sqrt{n}}{\log n})$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Pour la fonction de répartition  $F_n(x)$  introduite dans le chapitre I, on a alors*

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} = e^{\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda(\frac{x}{\sqrt{n}})} \left[ 1 + O\left(\frac{x \log n}{\sqrt{n}}\right) \right]$$

et

$$\frac{F_n(-x)}{\Phi(-x)} = e^{-\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda(-\frac{x}{\sqrt{n}})} \left[ 1 + O\left(\frac{x \log n}{\sqrt{n}}\right) \right]$$

$\lambda(z)$  étant la fonction définie par (18) et qui admet le développement (19), dont les premiers coefficients sont donnés par (20).

Les démonstrations des deux relations énoncées étant tout à fait analogues, nous nous bornerons à la démonstration de la première relation.

Si dans (12b) nous prenons  $x = \frac{\bar{m}\sqrt{n}}{\sigma}$ , nous aurons

$$1 - F_n\left(\frac{\bar{m}\sqrt{n}}{\sigma}\right) = R^n e^{-h\bar{m}n} \int_0^\infty e^{-h\sigma\sqrt{n}y} d\bar{F}_n(y) \quad (21)$$

pour toute valeur réelle de  $h$  telle que  $|h| < A$ . Posons maintenant

$$\bar{F}_n(y) = \Phi(y) + Q_n(y). \quad (22)$$

D'après le théorème de Liapounoff, on a <sup>(3)</sup> alors pour tout  $n > 1$  et pour tout  $y$  réel

$$|Q_n(y)| < k \frac{\log n}{\sqrt{n}},$$

où

$$k = \frac{3}{\sigma^3} \int_{-\infty}^\infty |y - \bar{m}|^3 dV(y).$$

Le nombre  $k$  ainsi défini dépend évidemment de  $h$ . Or il

<sup>3</sup>Voir H. Cramér, Random variables and probability distributions, Cambridge Tracts in Mathematics, No 36, Cambridge 1937, p. 77.

Hence, observing that  $z^2 = (\frac{\bar{m}}{\sigma})^2$  and letting

$$\frac{\bar{m}^2}{2\sigma^2} - h\bar{m} + \log R = z^3 \lambda(z), \quad (18)$$

$\lambda(z)$  admits a series expansion

$$\lambda(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \quad (19)$$

which converges for all  $z$  of modulus sufficiently small, and we have

$$c_0 = \frac{\gamma_3}{6\sigma^3}, \quad c_1 = \frac{\sigma^2 \gamma_4 - 3\gamma_3^2}{24\sigma^6}, \dots \quad (20)$$

This being given, we can formulate our fundamental theorem in the following way.

**THEOREM 1.** *Assume that Condition A is satisfied. Let  $x$  be a real number that can depend on  $n$  such that  $x > 1$  and  $x = o(\frac{\sqrt{n}}{\log n})$  when  $n$  goes to infinity. For the cumulative distribution function  $F_n(x)$  introduced in chapter 1, we then have*

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} = e^{\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda(\frac{x}{\sqrt{n}})} \left[ 1 + O\left(\frac{x \log n}{\sqrt{n}}\right) \right]$$

and

$$\frac{F_n(-x)}{\Phi(-x)} = e^{-\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda(-\frac{x}{\sqrt{n}})} \left[ 1 + O\left(\frac{x \log n}{\sqrt{n}}\right) \right]$$

$\lambda(z)$  being the function defined by (18) and which admits the development (19), whose first coefficients are given by (20).

The proofs of the two relations just stated being totally analogous, we will restrict ourselves to prove the first relation.

If in (12b) we take  $x = \frac{\bar{m}\sqrt{n}}{\sigma}$ , we will have

$$1 - F_n\left(\frac{\bar{m}\sqrt{n}}{\sigma}\right) = R^n e^{-h\bar{m}n} \int_0^\infty e^{-h\sigma\sqrt{n}y} d\bar{F}_n(y) \quad (21)$$

for all real values of  $h$  such that  $|h| < A$ . Now let

$$\bar{F}_n(y) = \Phi(y) + Q_n(y). \quad (22)$$

Following the theorem of Liapounov, we then have <sup>(3)</sup> for all  $n > 1$  and for all real  $y$

$$|Q_n(y)| < k \frac{\log n}{\sqrt{n}},$$

where

$$k = \frac{3}{\sigma^3} \int_{-\infty}^\infty |y - \bar{m}|^3 dV(y).$$

The number  $k$  thus defined depends obviously on  $h$ . How-

<sup>3</sup>See H. Cramér, Random variables and probability distributions, Cambridge Tracts in Mathematics, No 36, Cambridge 1937, p. 77.

suit de (14), (15) et de la condition A qu'on peut déterminer un nombre positif  $A_1 < A$  tel que pour  $|h| < A_1$ , on ait  $k < K$  et par conséquent

$$|Q_n(y)| < K \frac{\log n}{\sqrt{n}}, \quad (23)$$

où  $K$  est indépendant de  $h$ ,  $n$  et  $y$ .

Dès maintenant, nous considérons  $h$  comme une variable essentiellement *positive*. Faisons tendre  $n$  vers l'infini et  $h$  vers zéro, de manière que le produit ait une borne inférieure positive.

Nous avons alors par (14) et (15)

$$h\bar{\sigma}\sqrt{n} = \frac{\bar{m}\sqrt{n}}{\sigma} + O(h^2\sqrt{n}).$$

De (22) et (23) on déduit au moyen de calculs faciles

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-h\bar{\sigma}\sqrt{ny}} d\bar{F}_n(y) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-h\bar{\sigma}\sqrt{ny} - \frac{1}{2}y^2} dy - Q_n(0) \\ & \quad + h\bar{\sigma}\sqrt{n} \int_0^\infty e^{-h\bar{\sigma}\sqrt{ny}} Q_n(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-h\bar{\sigma}\sqrt{ny} - \frac{1}{2}y^2} dy + O\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-h\bar{\sigma}\sqrt{ny} - \frac{1}{2}y^2} dy \cdot [1 + O(h \log n)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{\bar{m}\sqrt{n}}{\sigma}y - \frac{1}{2}y^2} dy \cdot [1 + O(h \log n)] \\ &= e^{\frac{n\bar{m}^2}{2\sigma^2}} \left[1 - \Phi\left(\frac{\bar{m}\sqrt{n}}{\sigma}\right)\right] \cdot [1 + O(h \log n)]. \end{aligned}$$

En introduisant la dernière expression dans (21), on aura

$$\frac{1 - F_n\left(\frac{\bar{m}\sqrt{n}}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{\bar{m}\sqrt{n}}{\sigma}\right)} = e^{n\left(\frac{\bar{m}^2}{2\sigma^2} - h\bar{m} + \log R\right)} [1 + O(h \log n)]. \quad (24)$$

Soit maintenant  $x$  un nombre réel qui peut dépendre de  $n$ , tel que  $x > 1$  et  $x = o\left(\frac{\sqrt{n}}{\log n}\right)$ . Formons l'équation

$$x = \frac{\bar{m}\sqrt{n}}{\sigma}, \quad (25)$$

qui peut aussi s'écrire

$$\frac{\sigma x}{\sqrt{n}} = \bar{m} = \sum_2^\infty \frac{\gamma_\nu}{(\nu-1)!} h^{\nu-1},$$

et qui, par la substitution  $z = \frac{x}{\sqrt{n}}$ , devient identique à l'équation (16). Pour tout  $n$  suffisamment grand, l'équation (25) admet donc une seule racine positive  $h$  qui tend vers zéro lorsque  $n$

ever, it follows from (14), (15) and Condition A that we can determine a positive number  $A_1 < A$  such that for  $|h| < A_1$ , we have  $k < K$  and, consequently,

$$|Q_n(y)| < K \frac{\log n}{\sqrt{n}}, \quad (23)$$

where  $K$  is independent of  $h$ ,  $n$  and  $y$ .

From now on, we shall consider  $h$  as an essentially *positive* variable. Let  $n$  go to infinity and  $h$  to zero, in such a way that the product has a positive lower bound.

We then have from (14) and (15)

$$h\bar{\sigma}\sqrt{n} = \frac{\bar{m}\sqrt{n}}{\sigma} + O(h^2\sqrt{n}).$$

From (22) and (23) we deduce through simple calculations

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-h\bar{\sigma}\sqrt{ny}} d\bar{F}_n(y) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-h\bar{\sigma}\sqrt{ny} - \frac{1}{2}y^2} dy - Q_n(0) \\ & \quad + h\bar{\sigma}\sqrt{n} \int_0^\infty e^{-h\bar{\sigma}\sqrt{ny}} Q_n(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-h\bar{\sigma}\sqrt{ny} - \frac{1}{2}y^2} dy + O\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-h\bar{\sigma}\sqrt{ny} - \frac{1}{2}y^2} dy \cdot [1 + O(h \log n)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{\bar{m}\sqrt{n}}{\sigma}y - \frac{1}{2}y^2} dy \cdot [1 + O(h \log n)] \\ &= e^{\frac{n\bar{m}^2}{2\sigma^2}} \left[1 - \Phi\left(\frac{\bar{m}\sqrt{n}}{\sigma}\right)\right] \cdot [1 + O(h \log n)]. \end{aligned}$$

Introducing the last expression in (21), we will have

$$\frac{1 - F_n\left(\frac{\bar{m}\sqrt{n}}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{\bar{m}\sqrt{n}}{\sigma}\right)} = e^{n\left(\frac{\bar{m}^2}{2\sigma^2} - h\bar{m} + \log R\right)} [1 + O(h \log n)]. \quad (24)$$

Now let  $x$  be a real number which can depend on  $n$ , such that  $x > 1$  and  $x = o\left(\frac{\sqrt{n}}{\log n}\right)$ . Let us form the equation

$$x = \frac{\bar{m}\sqrt{n}}{\sigma}, \quad (25)$$

which can also be written as

$$\frac{\sigma x}{\sqrt{n}} = \bar{m} = \sum_2^\infty \frac{\gamma_\nu}{(\nu-1)!} h^{\nu-1},$$

and which, with the substitution  $z = \frac{x}{\sqrt{n}}$ , becomes identical to equation (16). For all  $n$  sufficiently large, equation (25) then admits a unique positive root  $h$  which converges to zero when

tend vers l'infini. D'après (18) on a

$$\frac{\bar{m}^2}{2\sigma^2} - h\bar{m} + \log R = \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^3 \lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right),$$

où  $\lambda(z)$  est défini par (19)-(20). Le produit  $h\sqrt{n}$  est bien borné inférieurement, car on déduit de (17)

$$h \sim \frac{z}{\sigma} = \frac{x}{\sigma\sqrt{n}},$$

et nous avons supposé  $x > 1$ .

Dans (24), on peut donc prendre  $h$  égal à la racine de (25). On obtient ainsi

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} = e^{\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)} \left[1 + O\left(\frac{x \log n}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

et le théorème 1 est démontré.

Du théorème 1, on peut déduire plusieurs corollaires intéressants. Démontrons d'abord le théorème suivant.

**THÉORÈME 2.** *Si la condition A est satisfaite, on a pour  $x > 1$ ,  $x = O(n^{1/6})$ ,*

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} = e^{\frac{c_0 x^3}{\sqrt{n}}} + O\left(\frac{x \log n}{\sqrt{n}}\right),$$

$$\frac{F_n(-x)}{\Phi(-x)} = e^{-\frac{c_0 x^3}{\sqrt{n}}} + O\left(\frac{x \log n}{\sqrt{n}}\right).$$

Ceci est une conséquence immédiate du théorème 1, si l'on remarque que, pour  $x = O(n^{1/6})$ , l'exposant  $\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$  reste borné lorsque  $n$  tend vers l'infini. On voit en particulier que, si  $x = o(n^{1/6})$ , les deux rapports considérés tendent vers l'unité quand  $n$  tend vers l'infini.

En observant que l'on a pour  $x > 1$ ,

$$1 - \Phi(x) < \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$\Phi(-x) < \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

on obtient aussi sans difficulté le théorème suivant qui se rattache immédiatement au théorème de Liapounoff.

**THÉORÈME 3.** *Si la condition A est satisfaite, on a pour  $x > 0$ ,  $x = O(n^{1/6})$ ,*

$$1 - F_n(x) = [1 - \Phi(x)] e^{\frac{c_0 x^3}{\sqrt{n}}} + O\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right),$$

$$F_n(-x) = \Phi(-x) e^{-\frac{c_0 x^3}{\sqrt{n}}} + O\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right).$$

Si, tout en restant dans les conditions du théorème 1,  $x$  est d'un ordre de grandeur plus élevé que celui de  $n^{1/6}$ , le

$n$  goes to infinity. From (18) we have

$$\frac{\bar{m}^2}{2\sigma^2} - h\bar{m} + \log R = \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^3 \lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right),$$

where  $\lambda(z)$  is defined by (19)-(20). The product  $h\sqrt{n}$  is indeed bounded below, since we deduce from (17)

$$h \sim \frac{z}{\sigma} = \frac{x}{\sigma\sqrt{n}},$$

and we have assumed  $x > 1$ .

In (24), we can therefore take  $h$  equal to the root of (25). We then obtain

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} = e^{\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)} \left[1 + O\left(\frac{x \log n}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

and Theorem 1 is proved.

From Theorem 1, we can deduce several interesting corollaries. Let us first prove the following theorem.

**THEOREM 2.** *If Condition A is satisfied, we have for  $x > 1$ ,  $x = O(n^{1/6})$ ,*

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} = e^{\frac{c_0 x^3}{\sqrt{n}}} + O\left(\frac{x \log n}{\sqrt{n}}\right),$$

$$\frac{F_n(-x)}{\Phi(-x)} = e^{-\frac{c_0 x^3}{\sqrt{n}}} + O\left(\frac{x \log n}{\sqrt{n}}\right).$$

This is an immediate consequence of Theorem 1, if we remark that, for  $x = O(n^{1/6})$ , the exponent  $\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$  remains bounded when  $n$  goes to infinity. In particular, we see that, if  $x = o(n^{1/6})$ , the two ratios considered converge to 1 when  $n$  goes to infinity.

By observing that we have for  $x > 1$ ,

$$1 - \Phi(x) < \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$\Phi(-x) < \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

we also obtain without difficulty the following theorem which immediately relates to the theorem of Liapounov.

**THEOREM 3.** *If Condition A is satisfied, we have for  $x > 0$ ,  $x = O(n^{1/6})$ ,*

$$1 - F_n(x) = [1 - \Phi(x)] e^{\frac{c_0 x^3}{\sqrt{n}}} + O\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right),$$

$$F_n(-x) = \Phi(-x) e^{-\frac{c_0 x^3}{\sqrt{n}}} + O\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right).$$

If, staying in the conditions of Theorem 1,  $x$  is of order higher than the order of  $n^{1/6}$ , Theorem 1 still provides asymp-

théorème 1 fournit encore des expressions asymptotiques des probabilités  $1 - F_n(x)$  et  $F_n(-x)$ . Si, par exemple, le coefficient  $c_0 = \frac{\gamma_3}{6\sigma^3}$  est différent de zéro, on voit que l'exposant  $\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda(\frac{x}{\sqrt{n}})$  est asymptotiquement équivalent à  $\frac{c_0 x^3}{\sqrt{n}}$ . Lorsque  $\frac{x}{n^{1/6}}$  tend vers l'infini positif, cet exposant tend donc vers  $+\infty$  ou vers  $-\infty$  selon le signe de  $c_0$ . D'après le théorème 1, le rapport  $\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)}$  tend vers  $+\infty$  ou vers 0 suivant le cas. Par le même raisonnement, le rapport  $\frac{F_n(-x)}{\Phi(-x)}$  tend alors vers 0 ou vers  $+\infty$  respectivement. — Si  $c_0 = 0$ , c'est évidemment le premier coefficient  $c_\nu \neq 0$  qui va dominer la question, sans qu'il soit nécessaire d'en préciser ici tous les détails.

En dernier lieu, un calcul simple permet de déduire du théorème 1 la généralisation suivante d'un théorème dû à M. Khintchine (cf. le chapitre suivant).

**THÉORÈME 4.** *Soit  $c$  une constante positive. Si la condition A est satisfaite, les deux expressions*

$$\frac{F_n(x + \frac{c}{x}) - F_n(x)}{1 - F_n(x)} \quad \text{et} \quad \frac{\Phi(x + \frac{c}{x}) - \Phi(x)}{1 - \Phi(x)},$$

tendent, pour  $n \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow \infty$ ,  $x = O(\frac{\sqrt{n}}{\log n})$ , vers une même limite, à savoir vers la quantité  $1 - e^{-c}$ .

Il y a évidemment un théorème correspondant pour les valeurs négatives de la variable.

## Chapitre IV

Si, en particulier, on choisit les variables aléatoires  $Z_n$  introduites au début de ce travail telles que, pour chaque  $Z_n$ , il n'y ait que deux valeurs possibles :

$$Z_n = \begin{cases} 1 - p & \text{avec la probabilité } p, \\ -p & \text{ " " " " } q = 1 - p, \end{cases}$$

on voit qu'on arrive au *cas des épreuves répétées*. On sait que, dans ce cas particulier, la fonction de répartition  $F_n(x)$  peut être interprétée de la manière suivante.

Supposons qu'on fasse une série de  $n$  tirages indépendants d'une urne, la probabilité d'amener une boule blanche étant toujours égale à  $p$ . Désignons par  $\nu$  le nombre des boules blanches obtenues au cours des  $n$  tirages. Alors nous avons

$$F_n(x) = \text{Prob}(\nu \leq np + x\sqrt{npq}),$$

et il bien connu que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \Phi(x),$$

pour tout  $x$  réel indépendant de  $n$ .

La quantité  $\frac{\nu - np}{\sqrt{npq}}$  est (avec un léger changement formel) ce que, d'après M. Borel, on appelle l'*écart relatif*. Pour tout  $x$  réel indépendant de  $n$ , la probabilité d'avoir un écart relatif

asymptotiques pour les probabilités  $1 - F_n(x)$  et  $F_n(-x)$ . If, for example, the coefficient  $c_0 = \frac{\gamma_3}{6\sigma^3}$  [[13]] is different from zero, then we see that the exponent  $\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda(\frac{x}{\sqrt{n}})$  is asymptotically equivalent to  $\frac{c_0 x^3}{\sqrt{n}}$ . When  $\frac{x}{n^{1/6}}$  goes to infinity, this exponent then goes to  $+\infty$  or to  $-\infty$  depending on the sign of  $c_0$ . Following Theorem 1, the ratio  $\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)}$  goes to  $+\infty$  or to 0, respectively, depending on the case. By the same reasoning, the ratio  $\frac{F_n(-x)}{\Phi(-x)}$  then goes to 0 or to  $+\infty$ , respectively. — If  $c_0 = 0$ , it is obvious that the first coefficient  $c_\nu \neq 0$  will dominate the question, so it is not necessary to precise here all the details.

Finally, a simple calculation allows to deduce from Theorem 1 the following generalization of a theorem due to Khintchine (see next chapter).

**THEOREM 4.** *Let  $c$  be a positive constant. If Condition A is satisfied, the two expressions*

$$\frac{F_n(x + \frac{c}{x}) - F_n(x)}{1 - F_n(x)} \quad \text{and} \quad \frac{\Phi(x + \frac{c}{x}) - \Phi(x)}{1 - \Phi(x)},$$

converge, for  $n \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow \infty$ ,  $x = O(\frac{\sqrt{n}}{\log n})$  [[14]], to the same limit, namely, the quantity  $1 - e^{-c}$ .

There is evidently a corresponding theorem for the negative values of the variable.

## Chapter IV

If, in particular, we choose the random variables  $Z_n$  introduced at the beginning of this work such that, for each  $Z_n$ , there are only two possible values:

$$Z_n = \begin{cases} 1 - p & \text{with probability } p, \\ -p & \text{ " " " " } q = 1 - p, \end{cases}$$

we see that we arrive at the *case of repeated trials*. We know that, in this particular case, the cumulative distribution function  $F_n(x)$  can be interpreted as follows.

Suppose that we have a series of  $n$  independent trials, the probability of choosing a white ball being always equal to  $p$ . Let  $\nu$  be the number of white balls obtained in these  $n$  trials. Then we have

$$F_n(x) = \text{Prob}(\nu \leq np + x\sqrt{npq}),$$

and it is well known that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \Phi(x),$$

for all  $x$  real and independent of  $n$ .

The quantity  $\frac{\nu - np}{\sqrt{npq}}$  is (with a slight formal change) what, following Borel, we call the *relative discrepancy*. For all  $x$  real and independent of  $n$ , the probability of having a relative



$\leq x$  tend donc vers la limite  $\Phi(x)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Cependant, il peut souvent être important de connaître le comportement asymptotique des *probabilités des grands écarts relatifs*, c'est-à-dire le comportement de  $F_n(x)$  quand  $x$  peut varier avec  $n$ , en tendant vers  $+\infty$ , ou vers  $-\infty$  quand  $n$  croît indéfiniment. Ce cas particulier du problème qui nous occupe dans ce travail a été considéré par plusieurs auteurs <sup>(4)</sup>. La plupart des résultats trouvés dans cette direction rentrent dans les théorèmes démontrés dans le chapitre précédent.

Ainsi M. Smirnof a démontré un théorème qui peut s'exprimer par la relation

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} = 1 + o\left(\frac{1}{x^{2s}}\right), 1$$

pour  $x = o(n^{\frac{1}{4s+6}})$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$ , et par une relation analogue pour les écarts négatifs. Comme on a pour les valeurs indiquées de  $x$

$$e^{\frac{c_0 x^3}{\sqrt{n}}} + O\left(\frac{x \log n}{\sqrt{n}}\right) = 1 + O\left(\frac{x^3 + x \log n}{\sqrt{n}}\right) = 1 + o\left(\frac{1}{x^{2s}}\right),$$

ce résultat est contenu dans notre théorème 2.

D'autre part, M. Lévy a donné, pour le cas des épreuves répétées, la relation (sur laquelle nous reviendrons dans le chapitre suivant)

$$\log(1 - F_n(x)) \sim \log(1 - \Phi(x)) \sim -\frac{x^2}{2},$$

qui est une conséquence de notre théorème 1, et enfin notre théorème 4 a été démontré pour le même cas particulier par M. Khintchine. Dans ces théorèmes de MM. Lévy et Khintchine, notre condition  $x = o(\frac{\sqrt{n}}{\log n})$  se trouve remplacée par la condition un peu moins restreinte <sup>(5)</sup>  $x = o(\sqrt{n})$ .

## Chapitre V

Retournons au problème général posé dans le chapitre I. Jusqu'ici, nous avons assujéti la fonction de répartition donnée  $V(x)$  à la seule condition A; nous allons maintenant introduire

<sup>4</sup>Voir p. ex. N. Smirnof, *Über Wahrscheinlichkeiten grosser Abweichungen*, *Rec. Soc. Math.* Moscou, 40 (1933), p. 441; A. Khintchine, *Über einen neuen Grenzwertstaz der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, *Math. Annalen* 101 (1929), p. 745; M. Fréchet, *Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités*, Paris, 1937, p. 222; P. Lévy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Paris 1937, p. 284.

H. Cramer, etc.

<sup>5</sup>Dans le cas des épreuves répétées, la fonction de répartition  $V(x)$  ne satisfait pas à la condition B, qui va être introduite dans le chapitre suivant et qui nous permettra de remplacer dans nos théorèmes la condition  $x = o(\frac{\sqrt{n}}{\log n})$  par la condition  $x = o(\sqrt{n})$ . Les résultats cités de MM. Khintchine et Lévy ne sont donc pas entièrement contenus dans nos résultats.

discrepancy  $\leq x$  thus converges to  $\Phi(x)$  when  $n$  goes to  $\infty$ .

However, it is often important to know the asymptotic behavior of *probabilities of large relative discrepancy*, that is, the behavior of  $F_n(x)$  when  $x$  can vary with  $n$ , going to  $+\infty$  or to  $-\infty$  when  $n$  indefinitely grows. This particular case of the problem that we consider in this work has been considered by many authors <sup>(4)</sup>. Most results obtained in that direction fit in the theorems proved in the previous chapter.

Thus Smirnof has proved a theorem which can be expressed by the relation

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} = 1 + o\left(\frac{1}{x^{2s}}\right),$$

for  $x = o(n^{\frac{1}{4s+6}})$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$ , and by a similar relation for negative discrepancies. Since we have for the indicated values of  $x$

$$e^{\frac{c_0 x^3}{\sqrt{n}}} + O\left(\frac{x \log n}{\sqrt{n}}\right) = 1 + O\left(\frac{x^3 + x \log n}{\sqrt{n}}\right) = 1 + o\left(\frac{1}{x^{2s}}\right),$$

this result is contained in our Theorem 2.

Moreover, Lévy has given, for the case of repeated trials, the relation (on which we will come back in the next chapter)

$$\log(1 - F_n(x)) \sim \log(1 - \Phi(x)) \sim -\frac{x^2}{2},$$

which is a consequence of our Theorem 1, and finally our Theorem 4 has been proved for the same particular case by Khintchine. In those theorems of Lévy and Khintchine, our condition  $x = o(\frac{\sqrt{n}}{\log n})$  is replaced by the least restrictive <sup>(5)</sup>  $x = o(\sqrt{n})$ .

## Chapter V

Let us go back to the general problem formulated in Chapter I. Up to now, we have only imposed Condition A on the cumulative distribution function  $V(x)$ ; we shall now introduce

<sup>4</sup>See e.g. N. Smirnof, *Über Wahrscheinlichkeiten grosser Abweichungen*, *Rec. Soc. Math.* Moscow, 40 (1933), p. 441; A. Khintchine, *Über einen neuen Grenzwertstaz der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, *Math. Annalen* 101 (1929), p. 745; M. Fréchet, *Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités*, Paris, 1937, p. 222; P. Lévy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Paris 1937, p. 284.

H. Cramer, etc.

<sup>5</sup>In the case of repeated trials, the cumulative distribution function  $V(x)$  does not satisfy Condition B, which will be introduced in the next chapter and which will allow us to replace in our theorems the condition  $x = o(\frac{\sqrt{n}}{\log n})$  by the condition  $x = o(\sqrt{n})$ . The cited results of Khintchine and Lévy are thus not entirely contained in our results.

une condition additionnelle B, qui nous permettra d'aller plus loin dans l'étude du comportement de la fonction  $F_n(x)$  pour des grandes valeurs de  $n$  et  $x$ .

La fonction  $V(x)$  peut, d'une manière unique, être mise sous la forme <sup>(6)</sup>

$$V(x) = \beta U_1(x) + (1 - \beta)U_2(x) \quad (26)$$

avec  $0 \leq \beta \leq 1$  où  $U_1(x)$  et  $U_2(x)$  sont deux fonctions de répartition telles qu'on ait *presque partout*

$$U_1(x) = \int_{-\infty}^x U_1'(y)dy,$$

$$U_2'(x) = 0.$$

CONDITION B. Dans la décomposition (26) de  $V(x)$ , on a  $\beta > 0$ .

Si  $V(x)$  satisfait à la condition B, on voit immédiatement qu'il en est de même pour la fonction  $\bar{V}(x)$  définie par (6). Pour la fonction  $Q_n(y)$  définie par (22) on a alors <sup>(7)</sup>

$$|Q_n(y)| < \frac{K}{\sqrt{n}}$$

pour tout  $n > 1$ , pour tout  $y$  réel et pour tout  $h$  de module suffisamment petit, la constante  $K$  étant indépendante de  $n$ ,  $y$  et  $h$ .

En introduisant ce résultat dans les calculs du chapitre III, on voit tout de suite que le facteur  $\log n$ , qui intervient dans les évaluations, peut être partout omis. De même la condition  $x = o(\frac{\sqrt{n}}{\log n})$ , dont le seul but est d'assurer la relation  $\frac{x \log n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$  peut être remplacée par  $x = o(\sqrt{n})$ . On a donc le théorème suivant.

THÉORÈME 5. Si les deux conditions A et B sont satisfaites, on peut remplacer dans les théorèmes 1 et 4 la condition  $x = o(\frac{\sqrt{n}}{\log n})$  par  $x = o(\sqrt{n})$ . On peut aussi omettre le facteur  $\log n$  qui apparaît dans l'évaluation du reste dans les théorèmes 1, 2 et 3.

On peut cependant aller plus loin et considérer aussi les valeurs de  $x$  qui sont du même ordre de grandeur que  $\sqrt{n}$ . Considérons en effet la condition A, et désignons par  $A_1$  et  $-A_2$  les bornes supérieures et inférieures des valeurs de  $h$  telles que l'intégrale (5) converge.  $A_1$  et  $A_2$  sont certainement des quantités positives, qui peuvent être finies ou non. En tenant compte des relations (14) et (15) on voit que, pour  $-A_2 < h < A_1$ , la quantité  $\bar{m}$  définie par (7) est une fonction continue et toujours croissant de  $h$ , qui s'annule pour  $h = 0$ .

<sup>6</sup>Voir H. Cramér, *l. c.*, p. 17.

<sup>7</sup>Voir H. Cramér, *l. c.*, p. 81. Il ne résulte pas immédiatement du théorème cité que la constante  $K$  peut être prise indépendante de  $h$ . En parcourant la démonstration du théorème on s'assure cependant sans difficulté qu'il en est bien ainsi.

another condition B that will allow us to go further in our study of the behavior of the function  $F_n(x)$  for large values of  $n$  and  $x$ .

The function  $V(x)$  can be put, in a unique way, in the form <sup>(6)</sup>

$$V(x) = \beta U_1(x) + (1 - \beta)U_2(x) \quad (26)$$

with  $0 \leq \beta \leq 1$  where  $U_1(x)$  and  $U_2(x)$  are two cumulative distribution functions such that *almost everywhere*

$$U_1(x) = \int_{-\infty}^x U_1'(y)dy,$$

$$U_2'(x) = 0.$$

CONDITION B. In the decomposition (26) of  $V(x)$ , we have  $\beta > 0$ . [[15]]

If  $V(x)$  satisfies Condition B, we see immediately that the same holds for the function  $\bar{V}(x)$  defined in (6). For the function  $Q_n(y)$  defined by (22), we then have <sup>(7)</sup>

$$|Q_n(y)| < \frac{K}{\sqrt{n}}$$

for all  $n > 1$ , for all real  $y$ , and for all  $h$  of sufficiently small modulus, the constant  $K$  being independent of  $n$ ,  $y$  and  $h$ .

By introducing this result into the calculations of Chapter III, we see directly that the factor  $\log n$ , which intervenes in the estimates, can be omitted everywhere. Likewise, the condition  $x = o(\frac{\sqrt{n}}{\log n})$ , whose only goal is to ensure the relation  $\frac{x \log n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ , can be replaced by  $x = o(\sqrt{n})$ . We thus have the following theorem.

THEOREM 5. If Conditions A and B are satisfied, then we can replace in Theorems 1 and 4 the condition  $x = o(\frac{\sqrt{n}}{\log n})$  by  $x = o(\sqrt{n})$ . We can also omit the factor  $\log n$  which appears in the evaluation of the rest in Theorems 1, 2 and 3.

We can however go further and also consider values of  $x$  that are of the same order as  $\sqrt{n}$ . Consider indeed Condition A and let us denote by  $A_1$  and  $-A_2$  the upper and lower bounds of the values of  $h$  such that the integral (5) converges.  $A_1$  and  $A_2$  are certainly positive quantities, which can be finite or not. Considering the relations (14) and (15), we see that, for  $-A_2 < h < A_1$ , the quantity  $\bar{m}$  defined by (7) is a continuous function, always growing with  $h$ , which vanishes for  $h = 0$ .

<sup>6</sup>See H. Cramér, *l. c.*, p. 17.

<sup>7</sup>See H. Cramér, *l. c.*, p. 81. It does not immediately follow from this theorem that the constant  $K$  can be taken independent of  $h$ . Following the proof of this theorem, we nevertheless see without difficulty that this indeed the case.

Les deux limites

$$\lim_{h \rightarrow A_1 - 0} \bar{m} = \sigma C_1, \quad \lim_{h \rightarrow -A_2 + 0} \bar{m} = -\sigma C_2,$$

existent donc,  $C_1$  et  $C_2$  ayant des valeurs positives, finies ou non. Pour tout  $c$  donné dans l'intervalle  $-C_2 < c < C_1$ , l'équation

$$\bar{m} = \sigma c \quad (27)$$

a une seule racine  $h$  dans l'intervalle  $-A_2 < h < A_1$ , dont le signe est le même que celui de  $c$ .

Soit maintenant  $h$  un nombre quelconque donné dans l'intervalle  $-A_2 < h < A_1$ , et considérons l'identité (21), où  $h$  entre comme paramètre. Les conditions A et B étant satisfaites, nous avons pour la fonction  $Q_n(y)$  définie par (22) le développement suivant<sup>(8)</sup>

$$Q_n(y) = \left( \frac{p_2(y)}{n^{\frac{1}{2}}} + \frac{p_5(y)}{n} + \dots + \frac{p_{3k-1}(y)}{n^{\frac{k}{2}}} \right) e^{-\frac{y^2}{2}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{k+1}{2}}}\right),$$

où  $k$  est un entier arbitraire, tandis que les  $p_\nu$  sont des polynômes dont le degré coïncide avec l'indice, et tels que les  $p_{2\nu}$  sont des polynômes pairs, les  $p_{2\nu-1}$  des polynômes impairs.

On en déduit, en refaisant les calculs du chapitre III,

$$\int_0^\infty e^{-h\bar{\sigma}\sqrt{n}y} d\bar{F}_n(y) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[ b_0 + \frac{b_1}{n} + \dots + \frac{b_{k-1}}{n^{k-1}} + O\left(\frac{1}{n^k}\right) \right]$$

pour tout entier positif  $k$ , les coefficients  $b_\nu$  dépendant de  $h$ . On a d'ailleurs  $b_0 = \frac{1}{h\bar{\sigma}\sqrt{2\pi}}$ . En introduisant dans (21), on obtient donc

$$\begin{aligned} 1 - F_n\left(\frac{\bar{m}\sqrt{n}}{\sigma}\right) &= \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-(h\bar{m} - \log R)n} \left[ b_0 + \frac{b_1}{n} + \dots + \frac{b_{k-1}}{n^{k-1}} + O\left(\frac{1}{n^k}\right) \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Soit maintenant  $c$  un nombre donné tel que  $0 < c < C_1$ , et prenons  $h$  égal à la racine (unique) positive de l'équation (27). En introduisant cette valeur dans (28) et en posant

$$\alpha = h\bar{m} - \log R \quad (29)$$

(où l'on voit facilement que  $\alpha$  est toujours positif), on a le théorème suivant.

**THÉORÈME 6.** *Si les deux conditions A et B sont satisfaites, on peut trouver un nombre positif  $C_1$  (fini ou non) tel que, pour tout  $c$  dans l'intervalle  $0 < c < C_1$ , on ait*

$$1 - F_n(c\sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\alpha n} \left[ b_0 + \frac{b_1}{n} + \dots + \frac{b_{k-1}}{n^{k-1}} + O\left(\frac{1}{n^k}\right) \right],$$

<sup>8</sup>Voir H. Cramér, *l. c.*, p. 81.

The two limits

$$\lim_{h \rightarrow A_1 - 0} \bar{m} = \sigma C_1, \quad \lim_{h \rightarrow -A_2 + 0} \bar{m} = -\sigma C_2,$$

thus exist,  $C_1$  and  $C_2$  having positive values, finite or not [[16]]. For all given  $c$  in the interval  $-C_2 < c < C_1$ , the equation

$$\bar{m} = \sigma c \quad (27)$$

has a unique root  $h$  in the interval  $-A_2 < h < A_1$ , whose sign is the same as that of  $c$ .

Now let  $h$  be an arbitrary number given in the interval  $-A_2 < h < A_1$  and consider the identity (21), where  $h$  enters as a parameter. Conditions A and B being satisfied, we have for the function  $Q_n(y)$  defined by (22) the following expansion<sup>(8)</sup>

$$Q_n(y) = \left( \frac{p_2(y)}{n^{\frac{1}{2}}} + \frac{p_5(y)}{n} + \dots + \frac{p_{3k-1}(y)}{n^{\frac{k}{2}}} \right) e^{-\frac{y^2}{2}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{k+1}{2}}}\right),$$

where  $k$  is an arbitrary integer, whereas  $p_\nu$  are polynomials whose degree coincides with the index, and such that  $p_{2\nu}$  are even polynomials and  $p_{2\nu-1}$  odd polynomials [[17]].

We deduce, by re-doing the calculations of Chapter III,

$$\int_0^\infty e^{-h\bar{\sigma}\sqrt{n}y} d\bar{F}_n(y) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[ b_0 + \frac{b_1}{n} + \dots + \frac{b_{k-1}}{n^{k-1}} + O\left(\frac{1}{n^k}\right) \right]$$

for all positive integer  $k$ , the coefficients  $b_\nu$  depending on  $h$ . We have in particular  $b_0 = \frac{1}{h\bar{\sigma}\sqrt{2\pi}}$ . By substituting in (21), we then obtain

$$\begin{aligned} 1 - F_n\left(\frac{\bar{m}\sqrt{n}}{\sigma}\right) &= \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-(h\bar{m} - \log R)n} \left[ b_0 + \frac{b_1}{n} + \dots + \frac{b_{k-1}}{n^{k-1}} + O\left(\frac{1}{n^k}\right) \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Now let  $c$  be a number such that  $0 < c < C_1$  and let us take  $h$  equal to the (unique) positive root of Equation (27). Introducing this value in (28) and taking

$$\alpha = h\bar{m} - \log R \quad (29)$$

(where we easily see that  $\alpha$  is always positive), we have the following theorem.

**THEOREM 6.** *If the Conditions A and B are satisfied, we can find a positive number  $C_1$  (finite or not) such that, for all  $c$  in the interval  $0 < c < C_1$ , we have*

$$1 - F_n(c\sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\alpha n} \left[ b_0 + \frac{b_1}{n} + \dots + \frac{b_{k-1}}{n^{k-1}} + O\left(\frac{1}{n^k}\right) \right],$$

<sup>8</sup>See H. Cramér, *l. c.*, p. 81.

où  $\alpha$  est donné par (27) et (29). Ici  $k$  est un entier positif arbitraire, et les  $b_\nu$  sont indépendants de  $n$ , mais dépendent de  $c$ . En particulier, on a toujours  $b_0 > 0$ .

Il y a évidemment une expression analogue pour  $F_n(-c\sqrt{n})$  où  $-C_2 < c < 0$ .

Ce théorème donne lieu à une remarque intéressante. Si les conditions A et B sont satisfaites, il suit du théorème 1 (avec les compléments apportés par le théorème 5) que l'on a, pour  $x \rightarrow \infty$ ,  $x = o(\sqrt{n})$ ,

$$\log[1 - F_n(x)] - \log[1 - \Phi(x)] = x^2 o(1) = o(\log[1 - \Phi(x)]),$$

d'où

$$\log[1 - F_n(x)] \sim \log[1 - \Phi(x)].$$

D'autre part, pour  $x = c\sqrt{n}$ , on déduit du théorème 6

$$\log[1 - F_n(x)] \sim -\frac{\alpha}{c^2} x^2 \sim \frac{2\alpha}{c^2} \log[1 - \Phi(x)],$$

où, en général, la constante  $\frac{2\alpha}{c^2}$  diffère de l'unité.

## Chapitre VI

Considérons maintenant une variable aléatoire  $Z_t$ , fonction d'un paramètre continu  $t$ , qu'on peut interpréter comme signifiant par exemple le temps. Supposons que l'accroissement  $\Delta Z_t = Z_{t+\Delta t} - Z_t$  soit toujours une variable aléatoire indépendante de  $Z_t$ , et que la loi de répartition de  $\Delta Z_t$  ne dépende ni de  $t$  ni de  $Z_t$ , mais seulement de  $\Delta t$ . On dit alors que la variable  $Z_t$  définit un *processus stochastique homogène*. Supposons encore que la valeur moyenne  $E(Z_t)$  s'annule pour tout  $t$ , et que  $E(Z_t^2)$  soit toujours fini.

Il résulte alors d'un théorème de M. Kolmogoroff<sup>(9)</sup> qu'on peut assigner une constante  $\sigma_0^2 \geq 0$  et une fonction  $S(x)$  bornée, jamais décroissante et continue au point  $x = 0$ , avec les propriétés suivantes. Posons

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= S(+\infty) - S(-\infty), \\ \sigma^2 &= \sigma_0^2 + \sigma_1^2, \\ F(x, t) &= \text{Prob}(Z_t \leq \sigma x \sqrt{t}), \\ f(z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{izy} dF(y, t). \end{aligned}$$

(Les différentielles devront toujours être prises par rapport à la variable  $y$ ). Alors on a

$$E(Z_t^2) = \sigma^2 t$$

et

$$\log f(z, t) = -\frac{\sigma_0^2}{2\sigma^2} z^2 + \frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{izy} - 1 - izy}{y^2} dS(\sigma y \sqrt{t}).$$

<sup>9</sup>Sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo. *Rend. R. Accad. Lincei*, (6), 15 (1932), p. 805 et p. 866.

where  $\alpha$  is given by (27) and (29). Here  $k$  is an arbitrary positive integer and  $b_\nu$  are independent of  $n$ , but depend on  $c$ . In particular, we always have  $b_0 > 0$ .

There is obviously an analogous expression for  $F_n(-c\sqrt{n})$  where  $-C_2 < c < 0$ .

This theorem gives rise to an interesting remark. If Conditions A and B are satisfied, it follows from Theorem 1 (with the complements given by Theorem 5) that we have, for  $x \rightarrow \infty$  and  $x = o(\sqrt{n})$ ,

$$\log[1 - F_n(x)] - \log[1 - \Phi(x)] = x^2 o(1) = o(\log[1 - \Phi(x)]),$$

whence

$$\log[1 - F_n(x)] \sim \log[1 - \Phi(x)].$$

Moreover, for  $x = c\sqrt{n}$ , we deduce from Theorem 6

$$\log[1 - F_n(x)] \sim -\frac{\alpha}{c^2} x^2 \sim \frac{2\alpha}{c^2} \log[1 - \Phi(x)],$$

where, in general, the constant  $\frac{2\alpha}{c^2}$  is different from 1.

## Chapter VI

Consider now a random variable  $Z_t$ , a function of the continuous parameter  $t$ , which we can interpret, for example, as the time. Suppose that the increment  $\Delta Z_t = Z_{t+\Delta t} - Z_t$  is always a random variable independent of  $Z_t$  and that the law of  $\Delta Z_t$  does not depend on  $t$  nor on  $Z_t$ , but only on  $\Delta t$ . We then say that the variable  $Z_t$  defines a *homogeneous stochastic process*. Suppose furthermore that the expectation  $E(Z_t)$  vanishes for all  $t$  and that  $E(Z_t^2)$  is always finite.

It then follows from a theorem of Kolmogorov<sup>(9)</sup> that we can assign a constant  $\sigma_0^2 \geq 0$  and a bounded function  $S(x)$ , never decreasing and continuous at  $x = 0$ , with the following properties. Define

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= S(+\infty) - S(-\infty), \\ \sigma^2 &= \sigma_0^2 + \sigma_1^2, \\ F(x, t) &= \text{Prob}(Z_t \leq \sigma x \sqrt{t}), \\ f(z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{izy} dF(y, t). \end{aligned}$$

(Derivatives must always be taken with respect to the variable  $y$ ). We then have

$$E(Z_t^2) = \sigma^2 t$$

and

$$\log f(z, t) = -\frac{\sigma_0^2}{2\sigma^2} z^2 + \frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{izy} - 1 - izy}{y^2} dS(\sigma y \sqrt{t}).$$

<sup>9</sup>Sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo. *Rend. R. Accad. Lincei*, (6), 15 (1932), p. 805 and p. 866.

Il s'ensuit sans difficulté

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(z, t) = e^{-\frac{z^2}{2}},$$

ce qui implique

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(x, t) = \Phi(x)$$

pour tout  $x$  réel indépendant de  $t$ .

Ici encore, on peut donc poser le problème d'étudier le comportement de  $F(x, t)$  lorsque  $x$  peut varier avec  $t$ , en tendant vers  $+\infty$  ou vers  $-\infty$  quand  $t$  tend vers l'infini. Ce problème n'est en réalité qu'un cas particulier du problème dont nous nous sommes occupés dans les chapitres précédents.

Supposons que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{hy} dS(y) \quad (30)$$

converge pour tout  $h$  de module suffisamment petit, et posons

$$\bar{S}(x) = \int_{-\infty}^x e^{hy} dS(y)$$

Alors il existe une variable  $\bar{Z}_t$  liée à un processus stochastique homogène, dont la répartition est définie au moyen de  $\sigma_0^2$  et  $\bar{S}(x)$  de la même manière que la répartition de  $Z_t$  a été définie par  $\sigma_0^2$  et  $S(x)$ . Désignons par  $\bar{\sigma}_1^2$ ,  $\bar{\sigma}^2$ ,  $\bar{F}(x, t)$  et  $\bar{f}(z, t)$  les quantités analogues aux précédentes formées en partant de  $\sigma_0^2$  et  $\bar{S}(x)$ . Définissons ici les quantités  $\bar{m}$  et  $R$  en posant

$$\begin{aligned} \bar{m} &= \sigma_0^2 h + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{hy} - 1}{y} dS(y), \\ \log R &= \frac{1}{2} \sigma_0^2 h^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{hy} - 1 - hy}{y^2} dS(y). \end{aligned}$$

On démontre alors par un calcul analogue à celui du chapitre II l'identité suivante qui a lieu pour tout  $h$  réel appartenant au domaine de convergence de l'intégrale (30) :

$$1 - F\left(\frac{\bar{m}\sqrt{t}}{\sigma}, t\right) = R^t e^{-h\bar{m}t} \int_0^{\infty} e^{-h\bar{\sigma}\sqrt{t}y} d\bar{F}(y, t).$$

Cette identité est, comme on le voit, tout à fait analogue à l'identité (21). On peut aussi s'en servir d'une manière absolument analogue, en démontrant des théorèmes sur la fonction  $F(x, t)$  qui sont parfaitement analogues aux théorèmes 1-6 sur la fonction  $F_n(x)$ . La seule différence est que le paramètre discontinu  $n$  a été remplacé par le paramètre continu  $t$ . Dans les conditions A et B, on doit remplacer la fonction  $V(x)$  par la fonction  $S(x)$  considérée dans ce chapitre <sup>(10)</sup>.

There follows without difficulty

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(z, t) = e^{-\frac{z^2}{2}},$$

which implies

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(x, t) = \Phi(x)$$

for all real  $x$  independent of  $t$ .

Here again we can thus consider the problem of studying the behavior of  $F(x, t)$  when  $x$  can vary with  $t$ , going to  $+\infty$  or to  $-\infty$  when  $t$  goes to infinity. This problem is nothing but a particular case of the problem that we have considered in the previous chapters.

Suppose that the integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{hy} dS(y) \quad (30)$$

converges for all  $h$  of sufficiently small modulus, and let

$$\bar{S}(x) = \int_{-\infty}^x e^{hy} dS(y).$$

Then there exists a variable  $\bar{Z}_t$  linked to a homogeneous stochastic process whose distribution function is defined by means of  $\sigma_0^2$  and  $\bar{S}(x)$ , in the same way that the distribution of  $Z_t$  was defined by  $\sigma_0^2$  and  $S(x)$ . Denote by  $\bar{\sigma}_1^2$ ,  $\bar{\sigma}^2$ ,  $\bar{F}(x, t)$  and  $\bar{f}(z, t)$  the quantities similar to those formed before by starting from  $\sigma_0^2$  and  $\bar{S}(x)$ . Define here the quantities  $\bar{m}$  and  $R$  as

$$\begin{aligned} \bar{m} &= \sigma_0^2 h + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{hy} - 1}{y} dS(y), \\ \log R &= \frac{1}{2} \sigma_0^2 h^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{hy} - 1 - hy}{y^2} dS(y). \end{aligned}$$

We then demonstrate through a calculation similar to that of Chapter II the following identity which holds for all real  $h$  in the domain of convergence of the integral (30) :

$$1 - F\left(\frac{\bar{m}\sqrt{t}}{\sigma}, t\right) = R^t e^{-h\bar{m}t} \int_0^{\infty} e^{-h\bar{\sigma}\sqrt{t}y} d\bar{F}(y, t).$$

This identity is, as we see, totally analogous to the identity (21). We can also use it in a manner absolutely analogous, by proving the theorems on the function  $F(x, t)$  which are perfectly analogous to Theorems 1-6 about the function  $F_n(x)$ . The only difference is that the discontinuous parameter  $n$  has been replaced by the continuous parameter  $t$ . In the Conditions A and B, we must replace the function  $V(x)$  by the function  $S(x)$  considered in this chapter <sup>(10)</sup>.



---

<sup>10</sup>La condition **B** peut être remplacée par une autre condition plus générale que celle obtenue de la manière indiquée. Voir H. Cramér, *l. c.*, p. 99. – Un théorème contenu dans notre théorème 6 a été énoncé, pour un cas particulier important du processus homogène, par F. Lundberg, *Försäkringsteknisk riskutjämning*, Stockholm 1926-1928, et démontré par F. Esscher, *l. c.*

---

<sup>10</sup>Condition **B** can be replaced by another condition that is more general than the one indicated. See H. Cramér, *l. c.*, p. 99. – A theorem contained in our Theorem 6 has been stated, for a particular important homogeneous case, by F. Lundberg, *Försäkringsteknisk riskutjämning*, Stockholm 1926-1928, and demonstrated by F. Esscher, *l. c.*

## Notes

- [[1]] “Repartition function” is translated as “cumulative distribution function” (CDF).
- [[2]] The third person singular “on” in French is translated as “we” throughout to avoid the correct but heavier “one”.
- [[3]] “Liapunov” is used instead of “Liapounoff”.
- [[4]] This is the central limit theorem.
- [[5]] This is the main problem to be studied: to treat fluctuations of the sum of random variables that are of order  $n$ , compared to order  $\sqrt{n}$  in the central limit theorem.
- [[6]] This is the large deviation regime of fluctuations.
- [[7]] Condition A is now called the Cramér condition; it requires the generating function of the CDF  $V(x)$  to exist in a neighbourhood of  $h = 0$ .
- [[8]] The original article contains “stocastique”, which seems to be an error deriving from the Italian “stocastico”.
- [[9]] Footnotes are numbered consecutively rather than by page, as in the French original.
- [[10]] The transformation from  $V(x)$  to  $\bar{V}(x)$ , introduced by Esscher in 1932, is now often called the Cramér transform.
- [[11]] The bars over various symbols are often positioned incorrectly in the French original; the Russian version is slightly better.
- [[12]] Cumulants.
- [[13]] The original article contains  $\gamma^3$ ; this error is repeated in the Russian version.
- [[14]] The original article contains 0 instead of  $O$ . The correct  $O$  is found in the Russian translation.
- [[15]] This condition requires the CDF  $V(x)$  to have a smooth part with density  $U_1'(x)$  and discrete part represented by  $U_2(x)$ .
- [[16]] The two limits define the region of convergence of the generating function of  $V(x)$ .
- [[17]] The original article contains  $p_{3k-1}$  instead of  $p_{3k-1}(y)$ . This is corrected here in both French and English versions.
- [[18]] “Accroissement” could be translated as “difference” or “variation”. We use here the technical term “increment”.
- [[19]] “Kolmogorov” is used instead of “Kolmogoroff”.

This document was compiled with  $\LaTeX$  using the `paracol` package for aligning the French and English texts, after a custom Perl script meshed them from separate files.