

2.8: Vryval teen lugweerstand II

(soos prob 17, bl 89)

Persoon val (vanuit rus) uit vliegtuig...

Laat afwaartse rigting positief wees
(verplasing $\equiv y(t)$; snelheid $\equiv v(t)$)

Vanuit rus: $y(0) = 0$; $v(0) = 0$

Sonder lugweerstand ($R = 0$)

$$m \frac{dv}{dt} = mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(t) = gt}$$

Met lugweerstand (Lineêre model: $R \propto v$)

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(t) = \frac{mg}{k} (1 - e^{-kt/m})}$$

Limietsnelheid is $\frac{mg}{k}$, waar $[k] = \text{kg/s}$

Met lugweerstand (Nie-lineêre model: $R \propto v^2$)

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(t) = ?}$$

Eenheid van k : $[k] = \text{kg/m}$

Herskryf DV: $\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}(v^2 - a^2)$, waar $a^2 = \frac{mg}{k}$

Skeiding van veranderlikes:

$$\frac{1}{2a} (\ln |v - a| - \ln |v + a|) = -\frac{k}{m}t + C$$

Aanvangsvoorwaarde: $v(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$$\ln \left| \frac{v - a}{v + a} \right| = -\frac{2ak}{m}t$$

$$\frac{ak}{m} = \sqrt{\frac{gk}{m}}$$

$$\left| \frac{v - a}{v + a} \right| = e^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}$$

$$\frac{v - a}{v + a} = \pm e^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}$$

Wanneer $t = 0$ en $\boxed{+}$ gekies word, dan $a = 0 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow$ teenstrydigheid

Wanneer $t = 0$ en $\boxed{-}$ gekies word, dan $v = 0 \Rightarrow$ bevredig aanvangsvoorwaarde

Kies dus $\boxed{-}$, sodat $\frac{v - a}{v + a} = -e^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}$

Maak v die onderwerp van die vergelyking:

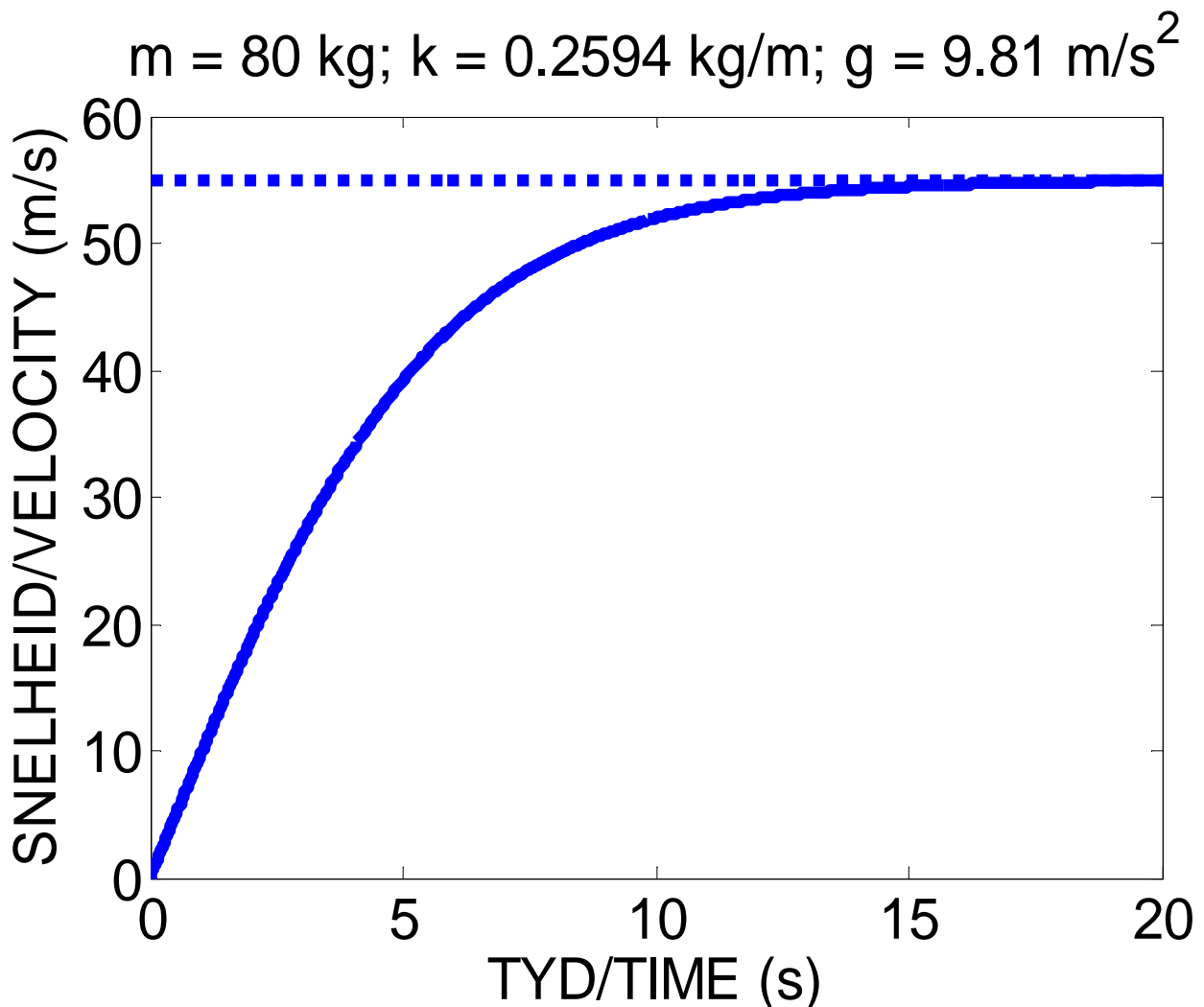
$$v(t) = a \left(\frac{1 - e^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}}{1 + e^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}} \right)$$

Let op: $v \rightarrow a$ as $t \rightarrow \infty$

\Rightarrow Limietsnelheid: $a = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ (bevestig eenheid)

Vermenigvuldig met $e^{\sqrt{\frac{gk}{m}}t}$ bo en onder:

$$v(t) = a \left(\frac{e^{\sqrt{\frac{gk}{m}}t} - e^{-\sqrt{\frac{gk}{m}}t}}{e^{\sqrt{\frac{gk}{m}}t} + e^{-\sqrt{\frac{gk}{m}}t}} \right) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh \left(\sqrt{\frac{gk}{m}} \cdot t \right)$$



Voorbeeld: 'n Man in 'n valskerm val vanuit rus en bereik 'n limietsnelheid van 4.9 m/s . Hoe lank sal dit neem om 2.45 m/s te bereik? Aanvaar dat lugweerstand direk eweredig is aan die kwadraat van die snelheid en neem $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Antwoord: 0.2746 sekondes
