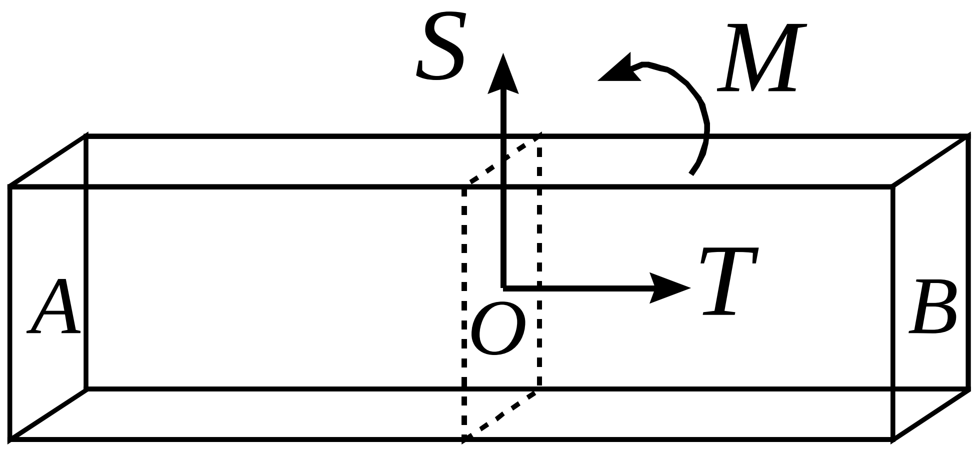
3.9 Uitwyking van 'n belaste balk *(bl 165)*

Probleem: Bepaal uitwyking van balk soos in fig 3.9.2 in Z&W (sien aanvullende aantekeninge op web)



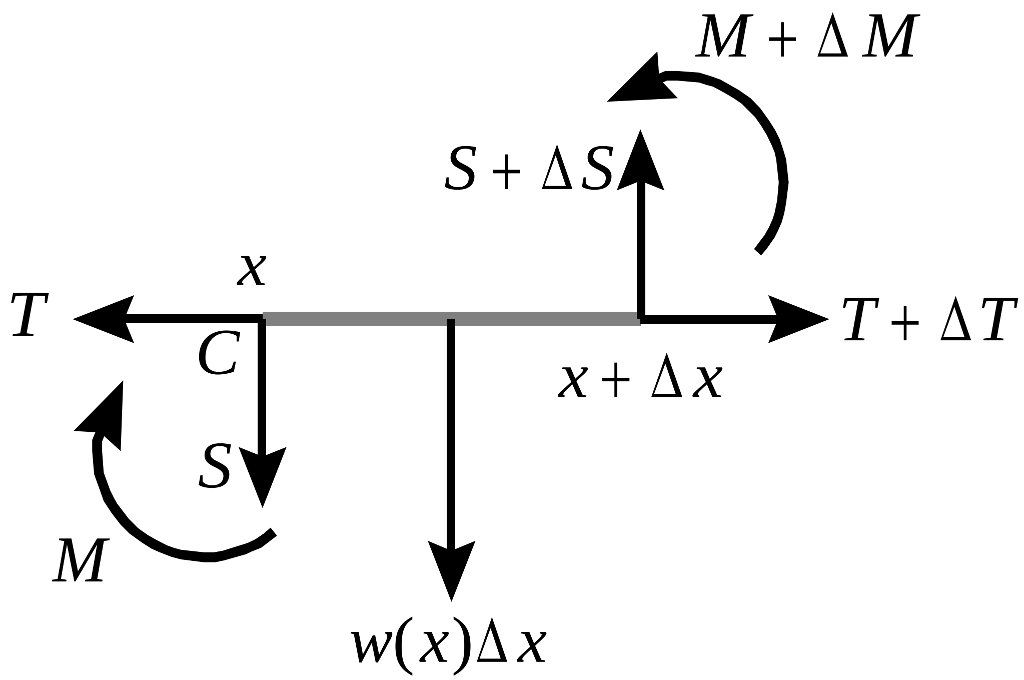
Beskou die snit O. Deel B oefen 'n trekkrag T, skuifkrag S, en buigmoment M op deel A uit. Kies x-as $\rightarrow$ en y-as $\uparrow$.

Neem aan:

(1) Balk is belas met gewig $w(x)$ per eenheidslengte

(2) Geen eksterne horisontale kragte

Beskou nou klein elementjie met lengte Δx:



Vir ewewig geld:

$\boxed{(\rightarrow)\ \Sigma F_x = 0}\ T + \Delta T - T = 0$ (1)

$\boxed{(\uparrow)\ \Sigma F_y = 0}\ S + \Delta S - S - w(x)\Delta x = 0$ (2)

$\boxed{\text{(Antikloksgewys) } \Sigma M_C = 0}$

$M + \Delta M - M + (S + \Delta S)\Delta x - (w(x)\Delta x)\frac{1}{2}\Delta x = 0$ (3)

In vgl (3), ignoreer terme wat klein is tot 2de orde d.w.s. $\Delta S \Delta x$ en $\Delta x \Delta x$:

$$M + \Delta M - M + S\Delta x = 0 \text{ (3')}$$

In (1), (2) en (3'), kanselleer terme en deel met Δx. Laat verder $\Delta x \to 0 \Rightarrow$ 3 basiese DVs van balke:

$$\frac{dT}{dx} = 0, \quad \frac{dS}{dx} = w(x), \quad \frac{dM}{dx} = -S$$

Om $y = y(x)$ te kry, differensieer die 3de van bg vgls na x, en gebruik middelste vgl om S te elimineer:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -\frac{dS}{dx} = -w(x) \text{ (4)}$$

Euler-Bernoulli-stelling vir dun balke: Neem aan dat $M \propto$ kromming K:

$$M = (EI)K \qquad \Rightarrow \qquad M \approx EI\,\frac{d^2y}{dx^2} \text{ (5)}$$

$E \equiv$ Young se modulus; $I \equiv$ traagheidsmoment

Vir herleiding van $K \approx \dfrac{d^2y}{dx^2}$, as $\dfrac{dy}{dx}$ klein is (d.w.s as uitwyking klein is) ...

... sien aanvullende aant'e (bl 2) (SELFSTUDIE)

Differensieer (5) twee keer m.b.t. x, en gebruik (4) om M te elimineer. Dan volg:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -w(x)$$

Met Z&C se keuse van die y-as afwaarts en E en I beide konstant, volg (4) op bl 166:

$$\boxed{EI\frac{d^4y}{dx^4} = w(x)}$$

Bg staan bekend as die **BALKVERGELYKING**

Vierde orde DV: Vir unieke oplossing word **vier** randvoorwaardes benodig, twee links en twee regs

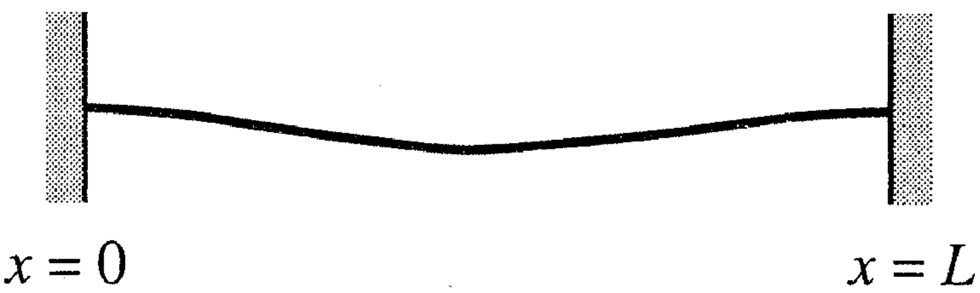
LW: As ons herhaaldelik differensieer (met y-as $\uparrow$ en EI konst):

$$\begin{aligned} EI\frac{d^2y}{dx^2} &= M \\ EI\frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{dM}{dx} = -S \\ EI\frac{d^4y}{dx^4} &= -\frac{dS}{dx} = -w(x) \end{aligned}$$

Met y-as $\downarrow$ $\Rightarrow$ $EI\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{dS}{dx} = w(x)$

Tipiese randvoorwaardes:

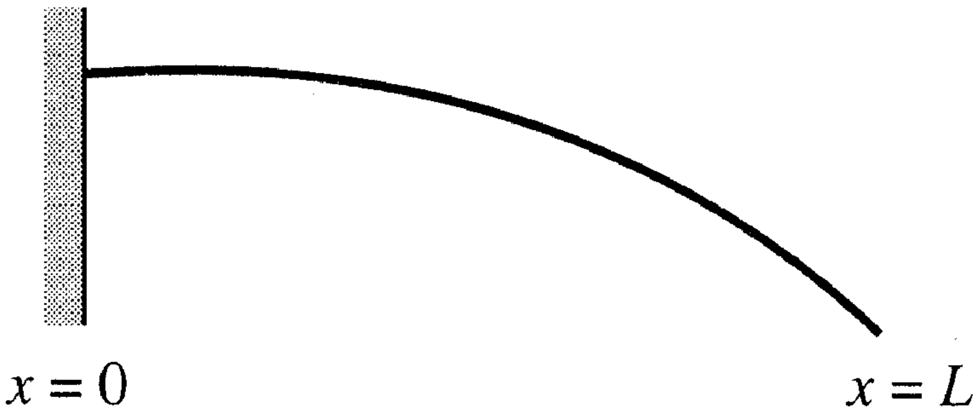
Ingebed aan beide kante



$y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ $\qquad$ $y(L) = 0,\ y'(L) = 0$

Uitwyking van ’n belaste balk — Tr 6

Ingebed links en vry regs



$y(0)=0,\ y'(0)=0$ $\qquad$ $y''(L)=0,\ y'''(L)=0$

Links: uitwyking & helling nul $\qquad$ Regs: M & S nul

Eenvoudig ondersteun aan beide kante

$y(0)=0,\ y''(0)=0$ $\qquad$ $y(L)=0,\ y''(L)=0$

Links: uitw & M nul $\qquad$ Regs: uitw & M nul

Voorbeeld 1 (bl 166): 'n Balk van lengte L is ingebed aan beide kante. Vind die uitwyking van die balk as 'n konstante las w_0 uniform versprei is oor sy lengte, m.a.w. $w(x) = w_0,\ 0 < x < L$.

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w_0$$

Antwoord: $y(x) = \dfrac{1}{24}\dfrac{w_0}{EI}\, x^2(x-L)^2$

Maksimum uitwyking: $y_{\max} = \dfrac{1}{384}\dfrac{w_0}{EI}\, L^4$

Voorbeeld 2 (Oef 3.9, Nr 3): Soortgelyk aan vb 1, maar ingebed links en eenvoudig ondersteun regs.

Antwoord: $y(x) = \dfrac{w_0}{48EI}\, x^2(x-L)(2x-3L)$

Voorbeeld 3: Soortgelyk aan vb 1, maar vry links en eenvoudig ondersteun regs.

Antwoord: Onoplosbaar

Uitwyking van 'n belaste balk　　Tr 8