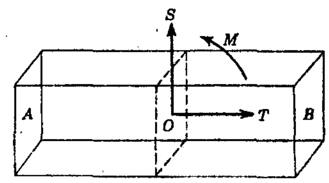
TWB264: Aanvullende aantekeninge by Zill & Cullen, Afd. 3.9

Die probleem is die bepaling van die uitwyking van 'n balk, soos in Fig. 3.41 in Zill & Cullen.



Beskou die snit O soos in die skets hiernaas. Die gedeelte B oefen 'n trekkrag, T, en 'n skuifkrag, S, uit op gedeelte A. Daar is ook 'n moment M soos aangedui.

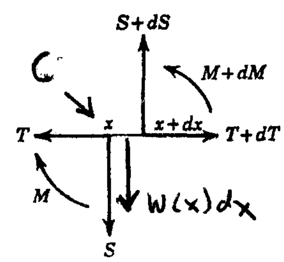
Kies die x-as horisontaal en die y-as opwaarts. Neem aan:
(a) Die balk is belas met gewig $w(x)$ per eenheidslengte.
(b) Daar is geen eksterne horisontale kragte nie.

Beskou nou 'n klein elementjie met lengte Δx soos in die skets. Vir ewewig geld

$$\rightarrow \qquad T + \Delta T - T = 0 \tag{1}$$

$$\uparrow \qquad S + \Delta S - S - w(x)\Delta x = 0 \tag{2}$$

$$C \qquad M + \Delta M - M + (S + \Delta S)\Delta x - (w(x)\Delta x)\frac{1}{2}\Delta x = 0 \tag{3}$$



In vergelyking (3), ignoreer terme wat klein is tot die tweede orde, dws $\Delta S \Delta x$ en Δx^2. Dit lewer

$$C \qquad M + \Delta M - M + S\Delta x = 0. \qquad (3')$$

In vergelykings (1), (2) en (3′), kanselleer nou terme en deel oral met Δx. Laat verder $\Delta x \to 0$, dan volg die drie basiese DVs van balke:

$$\frac{dT}{dx} = 0, \qquad \frac{dS}{dx} = w(x), \qquad \frac{dM}{dx} = -S.$$

Om 'n DV vir die uitwyking $y = y(x)$ te herlei, differensieer die derde van hierdie vergelykings na x, en gebruik die middelste vergelyking om S te elimineer:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -\frac{dS}{dx} = -w(x). \tag{4}$$

In die Euler-Bernoulli teorie van dun balke word aangeneem dat M direk eweredig is aan die kromming κ, oftewel

$$M = EI\kappa \qquad \Longrightarrow \qquad M \approx EI\frac{d^2y}{dx^2}. \tag{5}$$

Hier is E Young se modulus, en I die traagheidsmoment, wat beide moontlik funksies van x kan wees. Ons het die benadering gemaak dat die kromming κ benaderd gelyk is aan d^2y/dx^2, wat net 'n geldige aanname is as dy/dx klein is, oftewel dat die uitwyking klein is.[1]

Differensieer nou (5) tweemaal na x, en gebruik (4) om M te elimineer. Dan volg

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -w(x).$$

Met Zill & Cullen se keuse van die y-as afwaarts en E en I beide konstant, volg (4), p. 167:

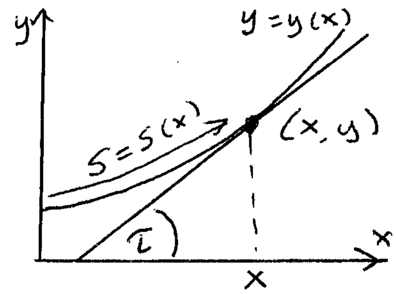
$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w(x).$$

---

[1] Sien die volgende bladsy vir 'n herleiding van $\kappa \approx \frac{d^2y}{dx^2}$.

Hierdie staan bekend as die balkvergelyking. Vir 'n unieke oplossing benodig mens vier randvoorwaardes: twee links en twee regs. Tipiese randvoorwaardes word opgesom in die tabel op p. 167. LW: die voorwaarde $y'' = 0$ beteken $M = 0$, terwyl $y''' = 0$ beteken $S = 0$.

'n Formule vir kromming. Laat $y = y(x)$ die grafiek van 'n funksie wees soos in die skets. By enige punt (x, y), konstrueer 'n raaklyn aan die kromme en laat τ die hoek wees wat die raaklyn met die x-as maak. Laat verder $s = s(x)$ die booglengte funksie wees. Die kromming (*curvature*) κ word nou gedefinieer as



$$\kappa = \frac{d\tau}{ds}.$$

Maw, as 'n klein toename in booglengte aanleiding gee tot 'n groot toename in die hoek, dan is die kromming groot (en omgekeerd). 'n Formule vir κ in terme van y en afgeleides kan verkry word deur die kettingreël soos volg te gebruik

$$\kappa = \frac{d\tau/dx}{ds/dx}. \tag{6}$$

Beskou nou die teller en die noemer afsonderlik. Vir die teller gebruik ons die definisie

$$\tan\tau = \frac{dy}{dx}.$$

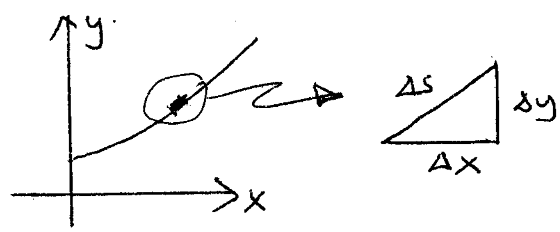
Differensieer nou beide kante na x, gebruik die kettingreël en die identiteit $\sec^2\tau = 1 + \tan^2\tau$,

$$\frac{d}{dx}\Big(\tan\tau\Big) = \frac{d^2y}{dx^2} \quad\Longrightarrow\quad \sec^2\tau\frac{d\tau}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad\Longrightarrow\quad \Big(1 + (\frac{dy}{dx})^2\Big)\frac{d\tau}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

en dus

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{d^2y/dx^2}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{7}$$

Wat die noemer aanbetref, beskou die booglengte element in die skets, waaruit volg (Pythagoras)



$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= \Delta x^2 + \Delta y^2 \\ \Longrightarrow \quad \frac{\Delta s^2}{\Delta x^2} &= 1 + \Big(\frac{\Delta y}{\Delta x}\Big)^2. \end{aligned}$$

Neem nou die vierkantswortel en laat $\Delta x \to 0$, dan

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2}. \tag{8}$$

Stel nou (7) en (8) in (6), dan volg (vergelyk bo-aan p. 167 in Zill & Cullen)

$$\kappa = \frac{d^2y/dx^2}{\left(1 + (\frac{dy}{dx})^2\right)^{3/2}} \qquad\Longrightarrow\qquad \kappa \approx \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Die benadering regs is net geldig as $\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2 \ll 1$, dws, slegs vir klein uitwykings.