2.7: Toepassing 3: Saamgestelde rente

Probleem: 'n Bedrag van P_0 word teen 'n rentekoers van x% per jaar belê. Hoeveel geld is in die rekening na t jaar?

Rentekoers: $r = x\% = x/100$

Met jaarlikse samestelling van rente:

Aanvanklik: $P(0) = P_0$
Na 1 jaar: $P(1) = P_0 + rP_0 = (1+r)P_0$
Na 2 jaar: $P(2) = (1+r)P(1) = (1+r)^2 P_0$
Na 3 jaar: $P(3) = (1+r)^3 P_0$
$\vdots$
Na t jaar: $P(t) = (1+r)^t P_0$

Met half-jaarlikse samestelling van rente:

Aanvanklik: $P(0) = P_0$
Na $\frac{1}{2}$ jaar: $P(\frac{1}{2}) = P_0 + \frac{r}{2}P_0 = \left(1 + \frac{r}{2}\right) P_0$
Na 1 jaar: $P(1) = (1 + \frac{r}{2})P(\frac{1}{2}) = \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 P_0$
$\vdots$
Na t jaar: $P(t) = \left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2t} P_0$

Saamgestelde rente

Met kwartalikse samestelling van rente:

Na t jaar: $P(t) = \left(1 + \frac{r}{4}\right)^{4t} P_0$

Met daaglikse samestelling van rente:

Na t jaar: $P(t) = \left(1 + \frac{r}{365}\right)^{365t} P_0$

Met kontinue samestelling van rente:

Na t jaar: $P(t) = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} P_0$, met $n \to \infty$

$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} P_0$

Stel: $y = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ en $s = r/n \Rightarrow n = r/s$

$$\Rightarrow \quad y = \left[(1+s)^{1/s}\right]^{rt}$$

As $n \to \infty$, dan $s \to 0$ (r is konstant)

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = \lim_{s\to 0} \left[(1+s)^{1/s}\right]^{rt}$$
$$= \left[\lim_{s\to 0} (1+s)^{1/s}\right]^{rt}$$

Saamgestelde rente Tr 3

Laat $f = (1+s)^{1/s}$ sodat $\ln f = \dfrac{\ln(1+s)}{s}$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \lim_{s\to 0} \ln f \;&=\; \lim_{s\to 0} \frac{\ln(1+s)}{s} \\
&=\; \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+s} \quad \text{(L'Hopital)} \\
&=\; 1
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad e^{\lim_{s\to 0} \ln f} = \lim_{s\to 0} e^{\ln f} = \lim_{s\to 0} f = e^1 = e
$$

$$
\Rightarrow \quad \lim_{s\to 0} (1+s)^{1/s} = e
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} \;&=\; \left[\lim_{s\to 0} (1+s)^{1/s}\right]^{rt} \\
&=\; e^{rt}
\end{aligned}
$$

Dus vir kontinue s'stelling van rente: $\boxed{P(t) = P_0 e^{rt}}$

Dit bevredig die DV:

$$
\frac{dP}{dt} = rP \quad \text{met} \quad P(0) = P_0
$$

Saamgestelde rente — Tr 4

Voorbeeld: 'n Bedrag van R 1000 word vir 3 jaar teen 'n rentekoers van 6% per jaar belê. Hoeveel is dit werd: (a) as rente jaarliks bygevoeg word en (b) as rente kontinu saamgestel word?

Antwoorde: (a) R 1191 (b) R 1197

(SELFSTUDIE) **Toepassing 4:** Newton se wet van afkoeling *(pp 20 & 75)*