## $\boxed{\text{2.8: Nie-lineêre modelle}}$ *(Bl 83)*

### Bevolkingsgroei

**Maltus-model (lineêr):** $\dfrac{dP}{dt} = kP, \ P(0) = P_0$

Oplossing: $P(t) = P_0 e^{kt}$

Let op: $P \to \infty$ as $t \to \infty \Rightarrow$ onrealisties!

Inkorporering van geboortes ($a$) en sterftes ($b$):

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP = \underbrace{(a-b)}_{k} P$$

Geboortetempo $\equiv aP$; Sterftetempo $\equiv bP$

Steeds eksp groei as $a > b$ & eksp verval as $a < b$

Dus nie 'n verbetering nie!

# Logistiese bevolkingsgroei Tr 2

## Verhulst se verbetering: Logistiese model

Verbeterde aanname: Hoe groter die bevolking ($P$), hoe groter die sterftetempo ($bP$), weens kompetisie

Model: $$\frac{dP}{dt} = aP - (bP)P = aP - bP^2$$

Herskryf: $$\boxed{\frac{dP}{dt} = P(a - bP),\ P(0) = P_0}$$

Let op: As $P = \dfrac{a}{b} = K$ dan $\dfrac{dP}{dt} = 0 \Rightarrow P$ stabiel

$K \equiv$ Drakapasiteit van die omgewing

Oplossing: Integrasiefaktore gaan nie werk nie, want DV is nie-lineêr

Gebruik dus skeiding van veranderlikes en parsiële breuke, en toon aan dat:

$$\boxed{P(t) = \frac{\frac{a}{b}P_0}{P_0 + (\frac{a}{b} - P_0)e^{-at}}}$$

Let op: As $t = 0$ dan $P = P_0$

As $t \to \infty$ dan $P \to \dfrac{a}{b} = K$ (drakapasiteit)

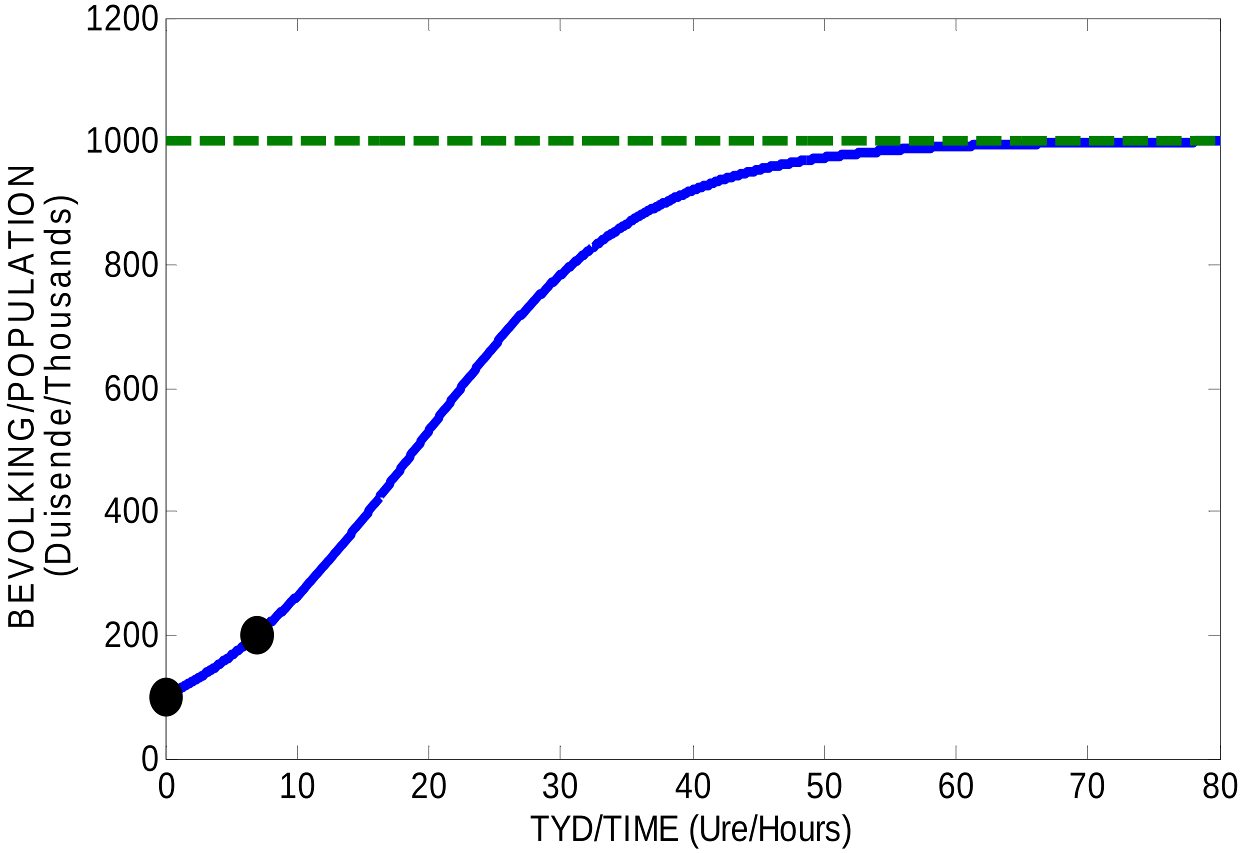
<u>Voorbeeld:</u> Die bevolkingsdinamika van 'n kolonie bakterieë kan gemodeleer word met Verhulst se logistiese groeimodel. Die kolonie bestaan aanvanklik uit ongeveer $100\,000$ individue en na $7$ uur word ongeveer $200\,000$ individue waargeneem. Uiteindelik blyk dit dat die bevolking op ongeveer $1\,000\,000$ individue stabiliseer.

Verkry nou 'n skatting vir die bevolking op enige tydstip $t$.

Laat $P = P(t)$ die aantal bakterieë (in duisende) op tyd $t$ (in uur) wees

<u>Antwoord (in duisende):</u> $P(t) = \dfrac{1000}{1 + 9(4/9)^{t/7}}$

# Logistiese bevolkingsgroei Tr 4




Grafiek vir algemene geval: sien Fig 2.8.2 (bl 84)

SELFSTUDIE: (bl 86)

- Modifikasies van logistiese vgl
- Chemiese reaksies