$\boxed{\text{2.7: Lineêre modelle}}$ *(Bl 72)*

Eksponensiële groei/verval (Baie belangrike DV) :

$$\frac{dx}{dt} = kx, \text{ waar } k \text{ konstante}$$

Aanvangswaarde: $x(0) = x_0$

Oplossingsmetodes: (a) Skeiding van veranderlikes
(b) Integrasiefaktor

(a) Skeiding van veranderlikes

$$\int \frac{dx}{x} = k \int dt + C_1$$

$$\ln |x| = kt + C_1$$

$$|x| = e^{kt} e^{C_1} = C_2 e^{kt}$$

$$x = \pm C_2 e^{kt} = C_3 e^{kt}$$

Aanvangswaarde: $x(0) = x_0 = C_3$

Dus: $\boxed{x(t) = x_0 e^{kt}}$ (Memoriseer oplossing!)

(b) Integrasiefaktor, $I.F.$

$$\frac{dx}{dt}\underbrace{-k}_{P(t)}x = 0 \tag{1}$$

Vermenigvuldig (1) met $I.F. = e^{\int P(t)dt} = e^{-kt}$:

$$e^{-kt}\frac{dx}{dt} - ke^{-kt}x = 0$$

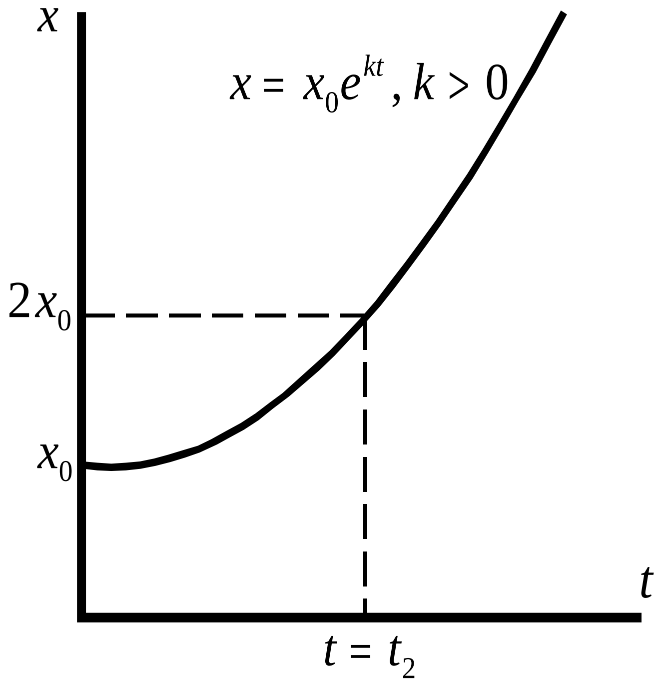
$$\frac{d}{dt}(e^{-kt}x) = 0$$

$$e^{-kt}x = C$$

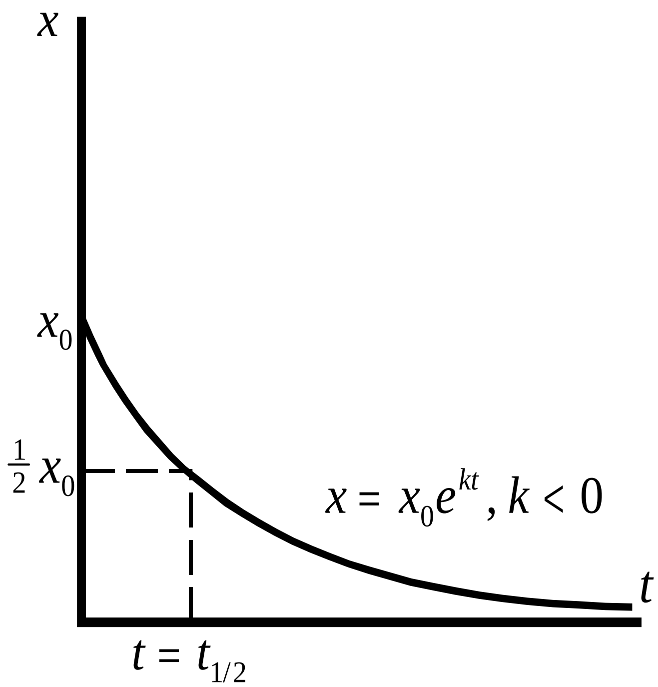
Soortgelyk aan (a) is $C = x_0$

Dus: $\boxed{x(t) = x_0e^{kt}}$

Eksponensiële groei ($k > 0$): $t_2 \equiv$ verdubbelingstyd



Eksponensiële verval ($k < 0$): $t_{1/2} \equiv$ halveertyd



Verdubbelingstyd (in geval van eksponensiële groei)

$$x(t) = x_0 e^{kt}, \ k > 0$$

As $x = 2x_0$ dan $t = t_2$:

$$\Rightarrow \quad 2x_0 = x_0 e^{kt_2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t_2 = \frac{\ln 2}{k}} \ \text{en} \ \ k = \frac{\ln 2}{t_2}$$

LW:
- Hoe groter k, hoe kleiner t_2, en omgekeerd
- t_2 is onafhanklik van x_0

Alternatiewe formule vir die oplossing:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{kt}, \ k > 0 \\ &= x_0 e^{\frac{t \ln 2}{t_2}} \\ &= x_0 (e^{\ln 2})^{t/t_2} \\ &= x_0 (2)^{t/t_2} \end{aligned}$$

Halveertyd (in geval van eksponensiële verval)

$$x(t) = x_0 e^{kt},\ k < 0$$

As $x = \frac{1}{2}x_0$ dan $t = t_{1/2}$:

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}x_0 = x_0 e^{kt_{1/2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t_{1/2} = \frac{-\ln 2}{k}} \ \text{en} \ \ k = \frac{-\ln 2}{t_{1/2}}$$

Alternatiewe formule vir die oplossing:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{kt},\ k < 0 \\ &= x_0 e^{-\frac{t\ln 2}{t_{1/2}}} \\ &= x_0 (e^{-\ln 2})^{t/t_{1/2}} \\ &= x_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/t_{1/2}} \end{aligned}$$

Toepassings van lineêre modelle

(1) Bevolkingsgroei

(2) Radioaktiewe verval

(3) Saamgestelde rente

(4) Newton se wet van afkoeling *(selfstudie)*

(5) Mengsels

(6) Elektriese stroombane *(selfstudie)*

(7) Vryval teen lugweerstand