

Probleem 1: Gegee ℓ & h , vind a & c

$$\boxed{h} = c[\cosh(a/c) - 1] \quad (1)$$

$$\boxed{\ell} = c \sinh(a/c) \quad (2)$$

Vanuit (1):

$$h + c = c \cosh(a/c) \quad (3)$$

(3)² - (2)²:

$$c = \frac{\ell^2 - h^2}{2h}$$

Stel terug in (2):

$$a = c \operatorname{arcsinh}(\ell/c)$$

Voorbeeld: Bereken a en c wanneer die lengte van die gedeflekteerde kabel gelyk is aan 3.3 m en die insakking gelyk is aan 0.6 m.

Antwoord: $a = 1.5$ m; $c = 1.9688$ m

Probleem 2: Gegee a & h , vind ℓ & c

$$h = c[\cosh(a/c) - 1] \quad (4)$$

$$\ell = c \sinh(a/c) \quad (5)$$

Vergelyking (4): Een vergelyking, een onbekende

Opl-opsies: (1) Numeries (meer akkuraat)

(2) Formule vir klein insakking

(benadering: $\cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2!}$)

Voorbeeld: Die span en insakking van 'n elastiese kabel is 150 m en 60 m, onderskeidelik. Die kabel het 'n massa per eenheidslengte van 12 kg/m.

Bepaal

(i) die trekkrag T_1 by die onderpunt van die gedeflekteerde kabel,

(ii) die maksimum trekkrag in die gedeflekteerde kabel, en

(iii) die lengte van die gedeflekteerde kabel.

$$60 = c (\cosh(150/c) - 1)$$

Opl-opsie 2: Aanvaar dat die insakking klein is

$$(c = \frac{T_1}{\rho} \text{ groot})$$

$$\Rightarrow 60 = c \left(1 + \frac{1}{2}(150/c)^2 - 1 \right)$$

$$\Rightarrow c = 187.5 \text{ m} \quad (\text{korrekte waarde: } 196.8 \text{ m})$$

$$T_1 = c\rho = 187.5 \times 12 \times 9.81 = 22\,073 \text{ N}$$

$$(\text{korrekte waarde: } 23\,167 \text{ N})$$

$$T_2 = T_1 + \rho h = 22\,073 + (12)(9.81)(60) = 29\,136 \text{ N}$$

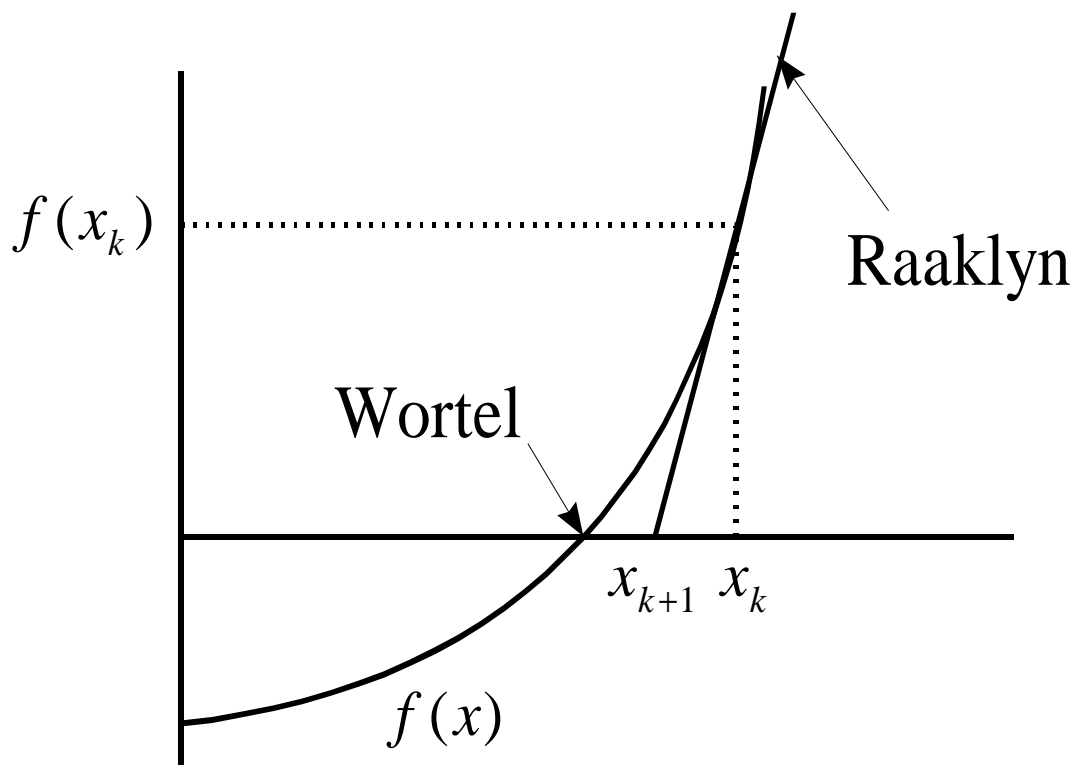
$$(\text{korrekte waarde: } 30\,230 \text{ N})$$

$$\ell = 187.5 \sinh(150/187.5) = 166.5 \text{ m}$$

Die lengte is dus 333 m (korrekte waarde: 330 m)

Opl-opsie 1: Numeries (meer akkuraat)

Newton se metode: $f(x) = 0$



$$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - 0}{x_k - x_{k+1}}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$x_0, x_1, x_2, x_3 \rightarrow$ wortel

$$60 = c (\cosh(150/c) - 1)$$

$$f(c) = c (\cosh(150/c) - 1) - 60 = 0$$

$$f'(c) = (\cosh(150/c) - 1) - \frac{150}{c} (\sinh(150/c))$$

Kies $c_0 = 187.5$ (benadering vir klein insakking)

$$c_1 = c_0 - \frac{f(c_0)}{f'(c_0)} = 196.3$$

$$c_2 = 196.8; \quad c_3 = 196.8$$

$$\Rightarrow c = 196.8 \text{ m}$$

Matlab-afvoer:

Iterasie	c	$f(c)$	$f'(c)$
0	187.5000	3.2691	-0.3730
1	196.2630	0.1661	-0.3361
2	196.7574	0.0005	-0.3342
3	196.7588	0.0000	-0.3342

Probleem 3: Gegee a & ℓ , vind h & c

$$h = c[\cosh(\frac{a}{c}) - 1] \quad (6)$$

$$\ell = c \sinh(\frac{a}{c}) \quad (7)$$

Voorbeeld: Gegee $a = 5$ m en $\ell = 20$ m. Vind h en c .

$$20 = c \sinh(5/c)$$

Benadering vir klein insakking: $\sinh(x) \approx x + \frac{x^3}{3!}$

$$20 = c \left(\frac{5}{c} + \frac{1}{6} \left(\frac{5}{c} \right)^3 \right)$$

$$\Rightarrow c = 1.1785 \text{ m}$$

$$h = 1.1785(\cosh(5/1.1785) - 1) \approx 39 \text{ m}$$

Probeer eerder Newton se metode...

$$20 = c \sinh(5/c)$$

$$f(c) = c \sinh(5/c) - 20 = 0$$

$$f'(c) = \sinh(5/c) - (5/c) \cosh(5/c)$$

Kies $c_0 = 1.1785$ (benadering vir klein insakking)

$$c_1 = c_0 - \frac{f(c_0)}{f'(c_0)} = 1.3645$$

Herhaal... $\Rightarrow c = 1.5320$ m

$$h = 1.5320 (\cosh(5/1.5320) - 1) = 18.53 \text{ m}$$

Matlab-afvoer:

Iterasie	c	$f(c)$	$f'(c)$
0	1.1785	20.999	-112.873
1	1.3645	6.6086	-52.0460
⋮	⋮	⋮	⋮
5	1.5320	0.0000	-29.6791
