Die hittevergelyking II

Beskou die spesifieke probleem:

$$u_t = ku_{xx}, \quad k > 0$$

Aanvangsvoorwaarde:

$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$

Randvoorwaardes:

$$u(0,t) = 0,\ t > 0$$

$$u(L,t) = 0,\ t > 0$$

Oplossingsmetodiek *(bl 697)*

Stap 1 Bepaal alle produkoplossings
Stap 2 Kies daardie oplossings in Stap 1 wat die randvoorwaardes bevredig
Stap 3 Probeer die aanvangsvoorwaarde(s) bevredig deur 'n lineêre kombinasie van die oplossings in Stap 2 te neem

Die beginsel van superposisie *(bl 690)*

As $v(x,t)$ en $w(x,t)$ die hittevergelyking bevredig, bevredig $z(x,t) = c\,v(x,t) + d\,w(x,t)$ ook die hittevergelyking

Bewys: $v_t = kv_{xx}$ en $w_t = kw_{xx}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad z_t &= cv_t + dw_t \\ &= c(kv_{xx}) + d(kw_{xx}) \\ &= k(cv_{xx} + dw_{xx}) \\ &= kz_{xx}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad z(x,t)$ is ook 'n oplossing!

$\boxed{\text{Stap 1}}$ Soek opl's van vorm: $u(x,t) = X(x)T(t)$

$$\Rightarrow \quad u_t = XT' \quad \text{en} \quad u_{xx} = X''T$$

$$\Rightarrow \quad XT' = kX''T$$

Deel nou regdeur met kXT:

$$\Rightarrow \frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} = \pm\lambda^2$$

$$\Rightarrow \quad T' = \pm k\lambda^2 T \quad \text{en} \quad X'' = \pm\lambda^2 X$$

Vir skeidingskonstante $\boxed{\lambda = 0}$

$$\Rightarrow \quad X'' = 0 \quad \text{en} \quad T' = 0$$

$$\Rightarrow \quad X = cx + d \quad \text{en} \quad T = e$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = X(x)T(t) = ax + b$$

Bevestig nou dat dit die PDV bevredig

Vir skeidingskonstantes $\boxed{+\lambda^2}$

$$\Rightarrow \quad X'' = +\lambda^2 X \quad \text{en} \quad T' = +k\lambda^2 T$$

$$\Rightarrow \quad X = a\cosh(\lambda x) + b\sinh(\lambda x) \quad \text{en}$$

$$T = ce^{k\lambda^2 t} \quad \text{dus...}$$

$$u(x,t) = e^{k\lambda^2 t}\left[a\cosh(\lambda x) + b\sinh(\lambda x)\right]$$

Bevestig nou dat dit die PDV bevredig

Vir skeidingskonstantes $\boxed{-\lambda^2}$

$$\Rightarrow \quad X'' = -\lambda^2 X \quad \text{en} \quad T' = -k\lambda^2 T$$

$$\Rightarrow \quad X = a\cos(\lambda x) + b\sin(\lambda x) \quad \text{en}$$

$$T = ce^{-k\lambda^2 t} \quad \text{dus...}$$

$$u(x,t) = e^{-k\lambda^2 t}\left[a\cos(\lambda x) + b\sin(\lambda x)\right]$$

Bevestig nou dat dit die PDV bevredig

$\boxed{\text{Stap 2}}$ Vir watter skeidingskonstantes word die randvoorwaardes

$$u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0,\ t > 0$$

bevredig?

Vir skeidingskonstante $\boxed{\lambda = 0}$: $u(x,t) = ax + b$

As $x = 0$ moet $u = 0 \Rightarrow b = 0$

As $x = L$ moet $u = 0 \Rightarrow aL = 0 \Rightarrow a = 0$

$$\Rightarrow \quad u \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Triviale oplossing!}$$

Vir skeidingskonstantes $\boxed{+\lambda^2}$

$$u(x,t) = e^{k\lambda^2 t}\left[a\cosh(\lambda x) + b\sinh(\lambda x)\right]$$

As $x = 0$ moet $u = 0 \Rightarrow \underbrace{e^{k\lambda^2 t}}_{\neq 0} \cdot a = 0 \Rightarrow a = 0$

As $x = L$ moet $u = 0 \Rightarrow \underbrace{e^{k\lambda^2 t}}_{\neq 0} \cdot b \cdot \underbrace{\sinh(\lambda L)}_{>0} = 0$

$\Rightarrow \quad b = 0 \quad \Rightarrow \quad u \equiv 0 \quad \Rightarrow$ Triviale oplossing!

Vir skeidingskonstantes $\boxed{-\lambda^2}$

$$u(x,t) = e^{-k\lambda^2 t}\left[a\cos(\lambda x) + b\sin(\lambda x)\right]$$

As $x = 0$ moet $u = 0 \Rightarrow \underbrace{e^{-k\lambda^2 t}}_{\neq 0} \cdot a = 0 \Rightarrow a = 0$

As $x = L$ moet $u = 0 \Rightarrow \underbrace{e^{-k\lambda^2 t}}_{\neq 0} \cdot b \cdot \underbrace{\sin(\lambda L)}_{\text{kan 0 wees}} = 0$

$$\sin(\lambda L) = 0 \text{ as } \lambda L = n\pi,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{L},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

$\Rightarrow$ Oneindig baie oplossings:

$$u_n = b_n e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \sin(\frac{n\pi}{L}x) = u_n(x,t)$$

Hierdie oplossings bevredig die PDV **en** die randvoorwaardes!

$\boxed{\text{Stap 3}}$ Probeer die aanvangsvoorwaarde(s) bevredig deur 'n lineêre kombinasie van die oplossings in $\boxed{\text{Stap 2}}$ te neem

Volgens die beginsel van superposisie is enige lineêre kombinasie van die oplossings ook 'n oplossing, dus...

Mees algemene oplossing:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

As $t = 0$ moet $u = f(x)$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

As $f(x)$ geskryf kan word as 'n lineêre kombinasie van die sinus-terme,

$$\sin(\frac{n\pi}{L}x),$$

kan die koëffisiënte b_n bepaal word deur koëffisiënte links en regs te vergelyk!

Voorbeeld: $u_t = u_{xx}$

Aanvangsvoorwaarde:

$$u(x,0) = \sin x,\ 0 < x < \pi$$

Randvoorwaardes:

$$u(0,t) = 0,\ t > 0$$

$$u(\pi,t) = 0,\ t > 0$$

Mees algemene oplossing:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

Die hittevergelyking II — Tr 8

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

As $t = 0$ moet $u = \sin x$

$$\Rightarrow \quad \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

Vergelyk koëffisiënte links en regs:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot \sin(x) + 0 \cdot \sin(2x) + 0 \cdot \sin(3x) + \ldots \\ &= b_1 \sin(x) + b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x) + \ldots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad b_1 = 1, \quad b_2 = b_3 = \ldots = 0$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = e^{-t} \sin x$$

Let op: $u \to 0$ (gestadigde toestand) as $t \to \infty$

Teken nou die oplossing op een assestelsel