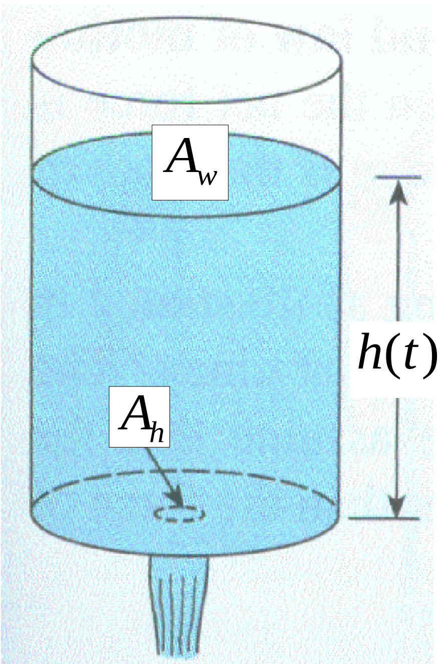
Toepassing: Vloei van water uit ’n tenk

(sien prob 13, bl 88 asook vgl (10), bl 22)



Beskou ’n silindriese tenk, aanvanklik gevul tot ’n hoogte van h_0. Water loop deur ’n gaatjie onder in die tenk uit. Bepaal die hoogte van die watervlak op enige tydstip t.

Laat $h = h(t)$ die hoogte van die watervlak op tyd t wees, A_w die oppervlak-area van die watervlak, A_h die oppervlak-area van die gaatjie, en g swaartekragversnelling.

Aannames:
- Ignoreer wrywing en samepersing van water by gat
- Toricelli se wet (bl 21)

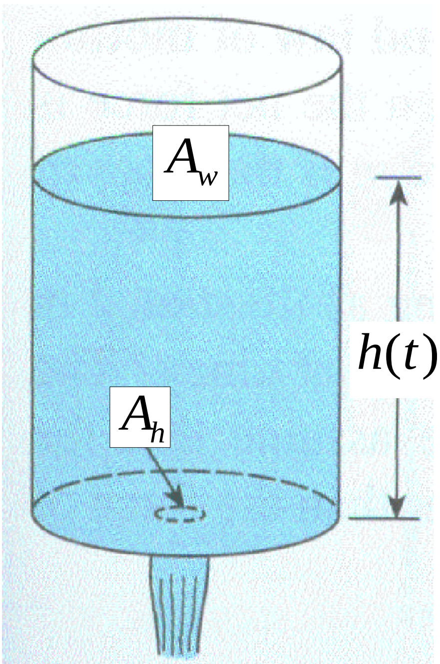
Dreinering van 'n silindriese tenk   Tr 2

Toricelli se wet (bl 21)

Elke waterdruppel spuit deur die gaatjie teen dieselfde snelheid v as wat dit sou gehad het as dit deur 'n afstand h vry geval het

$$\Rightarrow \quad v(h) = \sqrt{2gh}$$

<u>Formuleer:</u> Laat $V = V(t)$ die volume water in die tenk op tystip t wees



Watervlak daal Δh in tyd Δt

$$\Delta V = -\left(\sqrt{2gh}\cdot\Delta t\right)A_h$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt} = -A_h\sqrt{2gh}$$

$$V = A_w h$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_h}{A_w}\sqrt{2g}\,h^{1/2}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_h}{A_w}\sqrt{2g}\,h^{1/2} = -\rho\sqrt{2g}\,h^{1/2}, \quad h(0) = h_0$$

Dreinering van 'n silindriese tenk

Oplossing: Integrasiefaktore gaan nie werk nie, want DV is nie-lineêr

Gebruik dus skeiding van veranderlikes en toon aan dat:

$$h(t) = \left({h_0}^{1/2} - \rho\sqrt{\frac{g}{2}}\,t \right)^2$$

Die tenk is leeg wanneer $h = 0$, dus wanneer

$$t = \frac{{h_0}^{1/2}}{\rho}\sqrt{\frac{2}{g}}$$

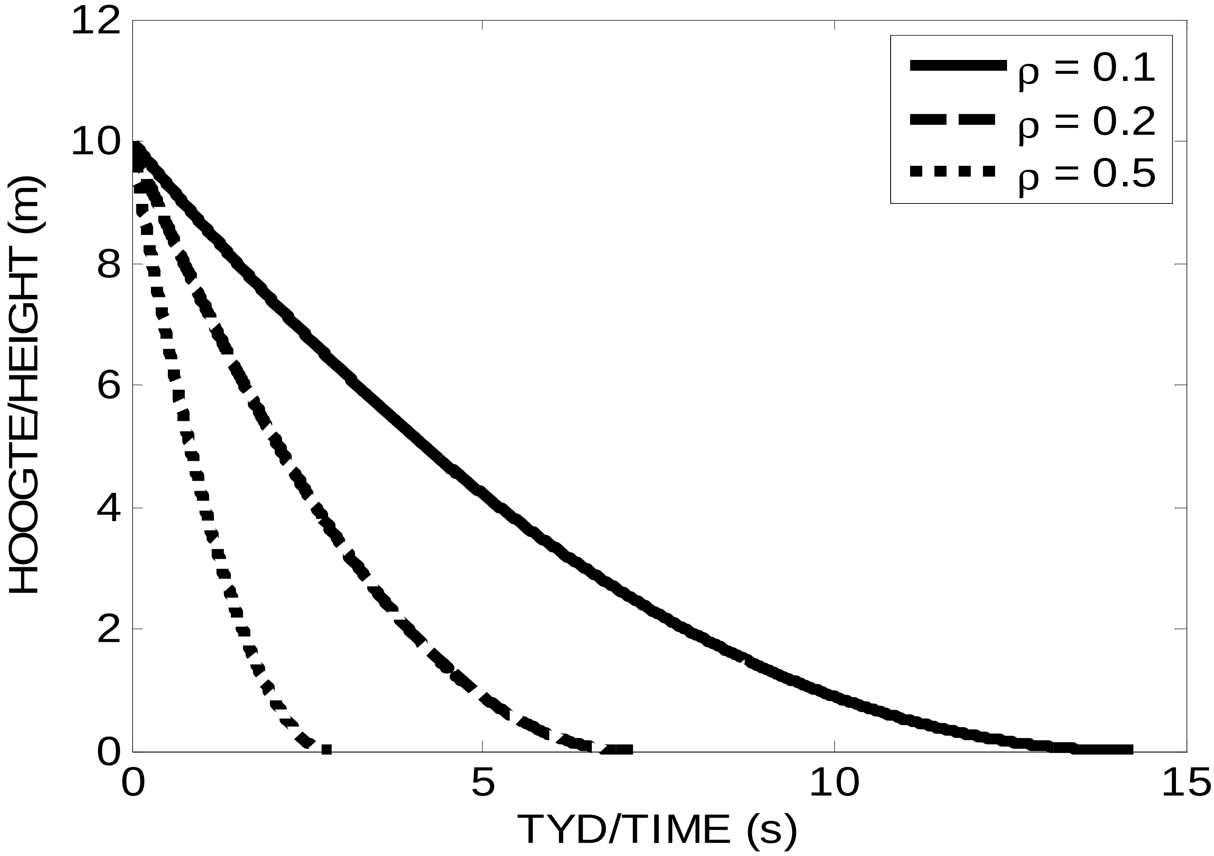
$$\text{Dus:} \quad t \in \left[0,\ \frac{{h_0}^{1/2}}{\rho}\sqrt{\frac{2}{g}} \right]$$

Toon aan dat eenheid van $\dfrac{{h_0}^{1/2}}{\rho}\sqrt{\dfrac{2}{g}}$ sekondes is

Toets: Gestel die tenk is onder heeltemal oop, dan $h_0 = \dfrac{1}{2}gt^2$ en $t = \dfrac{{h_0}^{1/2}}{1}\sqrt{\dfrac{2}{g}} \Rightarrow \rho = 1$

Dreinering van 'n silindriese tenk **Tr 4**

Voorbeeld ($h_0 = 10\,$m; $g = 9.81\,$m/s^2)



Grafiek vir algemene geval:

$\dfrac{dh}{dt}$ is altyd negatief $\Rightarrow$ grafiek is altyd dalend

Toon aan dat $\dfrac{d^2h}{dt^2} = \rho^2 g > 0 \Rightarrow$ konkaaf na bo