
STELLENBOSCH UNIVERSITEIT

TOEGEPASTE WISKUNDE

TW B242

VEKTOR-ANALISE

UITKOMSTE

Die module-uitkomst word hier volgens die ooreenstemmende afdelings in die handboek ZILL & WRIGHT genommer. Met suksesvolle voltooiing van die module, sal die student bekend wees met die materiaal in die volgende paragrawe in ZILL & WRIGHT: 7.5, 9.1, 9.4, 9.5, 9.6, 9.7, 9.8, 9.9, 9.10, 9.11, 9.12, 9.13, 9.14, 9.15, 9.16.

In besonder sal hy/sy die volgende take kan uitvoer:

- 7.5**
- In staat wees om die vergelyking van 'n lyn in 3D in vektor-vorm, of in parametriesse vorm te kan neerskryf, of in simmetriese vorm, wanneer inligting soos (a) een punt op die lyn en inligting oor die rigting, of (b) twee punte op die lyn gegee word.
 - In staat wees om die vergelyking van 'n vlak in 3D in vektor-vorm neer te skryf met twee oriëntasie-vektore gegee (d.w.s. $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a} + s\mathbf{b}$), óf met 'n normaalvektor, (d.w.s. $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_1$), óf in die vorm van 'n vergelyking in x , y , en z , wanneer inligting soos (a) een punt op die vlak en twee oriëntasie-vektore gegee word, of (b) een punt op die vlak en die normaal op die vlak gegee word, óf (c) drie punte op die vlak gegee word, óf (d) een punt op die vlak en ander inligting waaruit die oriëntasie van die vlak bepaal kan word, gegee word.
- 9.1**
- In staat wees om 'n vektor-funksie $\mathbf{r}(t)$ in 3D te teken (eenvoudige voorbeelde wat redeliksgewys geteken kan word).
 - In staat wees om die afgeleide van 'n vektor-funksie, d.w.s. $\mathbf{r}'(t)$, te bereken en in staat wees om dit te gebruik, byvoorbeeld om die raaklyn aan $\mathbf{r}(t)$ by 'n sekere punt te vind.
 - In staat wees om die kettingreël vir partiële afgeleides korrek toe te pas.
 - In staat wees om die booglengte van $\mathbf{r}(t)$ op 'n gegewe interval van t te bereken.
- 9.4**
- In staat wees om die kontoerkrommes (Eng: "level curves") van $f(x, y)$ te skets.
 - In staat wees om die kontoer-oppervlakke van $f(x, y, z)$ te skets (slegs eenvoudiger gevalle waar die oppervlak 'n sfeer, ellipsoïed, of paraboloid is).
- 9.5**
- In staat wees om die gradiënt van $f(x, y)$ en van $f(x, y, z)$ te bereken.
 - In staat wees om die rigtings-afgeleide van $f(x, y)$ in 'n gegewe rigting te bereken.
 - In staat wees om te bewys dat die maksimum van die rigtings-afgeleide deur $\|\nabla f\|$ gegee word.
 - In staat wees om identiteite soos Oefening 9.5, 45 tot 48 te bewys.

- 9.6**
- In staat wees om die interpretasie van ∇f te gee en dit in probleme te gebruik: dit is naamlik 'n vektor wat in die rigting van grootste toename in f wys, en waarvan die grootte die tempo van toename van f in daardie rigting is.
 - In staat wees om ∇f te gebruik om (a) die vergelyking van die lyn loodreg op 'n kontoerkromme te vind, (b) die vergelyking van die lyn parallel aan 'n kontoerkromme te vind, en (c) die vergelyking van die raaklyn of raakvlak aan 'n kontoer-oppervlak te vind.
- 9.7**
- In staat wees om vektorvelde in 2D te skets. Slegs redelik eenvoudige 'tekenbare' gevalle sal gevra word.
 - In staat wees om $\nabla \cdot \mathbf{F}$ sowel as $\nabla \times \mathbf{F}$ te bereken vir $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i}P(x, y, z) + \mathbf{j}Q(x, y, z) + \mathbf{k}R(x, y, z)$, (a) in die algemeen, d.w.s. terme van x , y , en z , sowel as (b) by 'n spesifieke (gegewe) punt.
 - In staat wees om die terme *irrotasioneel* en *onsamedrukbaar* te beskryf.
 - In staat wees om identiteite soos Oefening 9.7, 17-32 te bewys.
- 9.8**
- In staat wees om lynintegrale soos $\int F ds$, $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ langs gegewe stukgewys-kontinue paaie te bereken. Beide 2D en 3D gevalle kan gevra word.
 - In staat wees om die arbeid gedoen op 'n deeltjie te bereken as dit langs 'n gegewe onder die invloed van 'n gegewe kragveld pad gesleep word.
- 9.9**
- In staat wees om te bepaal of 'n differensiaal van die vorm $Pdx + Qdy$ 'n eksakte differensiaal is.
 - In staat wees om die potensiaal-funksie van 'n eksakte differensiaal van die vorm $Pdx + Qdy$ te verkry, deur integrasie.
 - In staat wees om lyn-integrale van die vorm $\int_C Pdx + Qdy$ op 'n pad-onafhanklike manier te integreer deur die potensiaal-funksie te gebruik, waar $Pdx + Qdy$ 'n eksakte differensiaal is.
 - In staat wees om aan te toon dat $\mathbf{F} = \nabla f$ (d.w.s. \mathbf{F} is 'n gradiënt-veld) altyd op 'n pad-onafhanklike manier geïntegreer kan word, d.w.s. $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ is 'n eksakte differensiaal.
 - In staat wees om te bepaal of die differensiaal van die vorm $Pdx + Qdy + Rdz$ 'n eksakte differensiaal is.
 - In staat wees om die potensiaalfunksie van die eksakte differensiaal van die vorm $Pdx + Qdy + Rdz$ te vind deur integrasie.
 - In staat wees om lyn-integrale van die vorm $\int_C Pdx + Qdy + Rdz$ op 'n padonafhanklike manier te bereken deur die relevante potensiaal-funksie te gebruik, waar $Pdx + Qdy + Rdz$ 'n eksakte differensiaal is.
- 9.10**
- In staat wees om dubbelintegrale (beide tipe I en II) te bereken, waar, óf (a) die rand deur 'n figuur gegee word, óf (b) die rand deur vergelykings gegee word.
 - In staat wees om die orde van integrasie korrek te verander waar nodig of waar gevra.
 - In staat wees om die area en volume van liggame te bereken deur $A = \iint_R dA$, of $V = \iint_R f(x, y)dA$ te gebruik.

- In staat wees om die massa, en die koördinate van massa-middelpunte van laminas met veranderlike digtheid te bereken deur $m = \iint_R \rho(x, y) dA$, $m\bar{x} = \iint_R x\rho(x, y) dA$, en/of $m\bar{y} = \iint_R y\rho(x, y) dA$ te gebruik.
 - *Laat uit: Traagheidsmomente.*
- 9.11**
- In staat wees om Cartesiese koördinate na poolkoördinate om te skakel en om poolkoördinate terug na Cartesiese koördinate om te skakel.
 - Die area-element in poolkoördinate uit die hoof ken: ($dA = r dr d\theta$).
 - In staat wees om dubbel-integrale in poolkoördinate te bereken en in staat wees om areas, volumes, massas, massa-middelpunte en traagheidsmomente in poolkoördinate te bereken.
- 9.12**
- Green se stelling ken en *in staat wees om dit te bewys* vir 'n eenvoudige gebied wat terselfdertyd as van tipe I en van tipe II beskou kan word.
 - In staat wees om beide kante van Green se stelling te bereken (en dus die stelling te bevestig). Lyn-integrale moet korrek geparametriseer word. Indien verlang, moet oppervlak-integrale ook in poolkoördinate bereken kan word.
 - *Laat uit: Gebiede wat gate bevat sowel as gebiede waar die funksie nie genoegsaam differensieerbaar is nie (bv. Voorbeelde 4, 5, en 6.)*
- 9.13**
- Die uitdrukking van die oppervlak-element uit die hoof ken, naamlik ($dS = \left(\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}\right) dA$). (*Dit is nie nodig om dit te kan herlei nie.*)
 - In staat wees om die buite-area van 'n gegewe liggaam te kan bereken.
 - In staat wees om oppervlak-integrale van die vorm $\iint_S G(x, y, z) dS$ te kan bereken.
 - In staat wees om die massa van 'n gekromde oppervlak wat veranderlike digtheid het, te kan bereken.
 - In staat wees om die vloed van 'n gegewe vektorveld \mathbf{F} deur 'n gegewe oppervlak S te bereken. ($\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$.)
- 9.14**
- Stokes se stelling ken. (*Nie nodig om dit te kan bewys nie.*)
 - In staat wees om beide kante van Stokes se stelling te kan bereken (en dus die stelling te bevestig). Lynintegrale moet korrek geparametriseer word. Vir oppervlak-integrale sal slegs projeksie op die xy -vlak gevra word. (*Dus, laat uit projeksie op die xz -, of yz -vlakke.*)
- 9.15**
- In staat wees om drievoudige integrale te bereken waar óf (a) die rand in 'n figuur gegee word, óf (b) die rand deur vergelykings gegee word.
 - In staat wees om die orde van integrasie korrek om te ruil waar nodig of waar gevra.
 - In staat wees om die volume van liggame te bereken met $V = \iiint_D dV$.
 - In staat wees om massas en koördinate van massa-middelpunte van liggame met veranderlike digtheid te bereken, deur $m = \iiint_D \rho(x, y, z) dV$, $m\bar{x} = \iiint_D x\rho(x, y, z) dV$, $m\bar{y} = \iiint_D y\rho(x, y, z) dV$, $m\bar{z} = \iiint_D z\rho(x, y, z) dV$, te gebruik.
 - *Laat uit: Traagheidsmomente wat drievoudige integrasie vereis.*
 - In staat wees om silindriese koördinate na Cartesiese koördinate en terug te verander.

- Die uitdrukking vir die volume-element in silindriese koördinate ken ($dV = r dr d\theta dz$) en in staat wees om dit te gebruik om drievoudige integrale in silindriese koördinate te bereken.
 - In staat wees om convert spherical coordinates to Cartesian en back.
 - Die uitdrukking vir die volume-element in sferiese koördinate ken ($dV = r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta$) en in staat wees om dit te gebruik om drievoudige integrale in sferiese koördinate te bereken.
- 9.16**
- Die divergensie-stelling (Gauss se stelling) ken. (*Nie nodig om dit te kan bewys nie.*)
 - In staat wees om beide kante van die divergensie-stelling te bereken (en sodoende die stelling te bevestig), of in staat wees om een kant te bereken, gegee die ander kant.

Algemeen

Die volgende terme moet geken word (en jy moet in staat wees om dit in simbole uit te druk waar van toepassing, byvoorbeeld ' \mathbf{F} is onsamedrukbaar' beteken $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$): 'vektor-veld', 'raaklyn', 'raakvlak', 'gradiënt', 'rotasie' (*Eng: curl*), 'divergensie', 'irrotasioneel', 'onsamedrukbaar', 'eksakte differensiaal', 'padonafhanklik', 'normaal op 'n oppervlak', 'booglengte', 'oppervlak-element', 'sirkulasie om 'n geslote kromme', 'volume-element', 'positief-geöriënteerde geslote pad', 'vloed deur 'n oppervlak', 'vloed uit 'n volume', 'konserwatiewe veld', 'arbeid verrig'.
