STELLENBOSCH UNIVERSITEIT

TOEGEPASTE WISKUNDE 20753-242

VEKTORANALISE

# NOTAS: HOE OM DIE POTENSIAALFUNKSIE TE VIND

As 'n vektorveld konserwatief is ($\equiv$ irrotasioneel $\equiv$ 'n gradiëntveld), dan hang lynintegrale van die vorm

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \tag{1}$$

slegs af van die beginpunt en die eindpunt van die pad C en nie van die spesifieke pad wat die twee punte verbind nie (op voorwaarde dat geen pad deur 'n singulariteit van **F** loop nie, of dat dit 'n singulariteit in **F** omsirkel nie).

Die integraal in (1) word dan geskryf as

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \tag{2}$$

waar A en B etikette vir die beginpunt en die eindpunt van die pad C is.

Ten einde te toets of **F** irrotasioneel is, sal 'n mens eenvoudig $\nabla \times \mathbf{F}$ bereken en kontrolleer dat die nul is. As dit wel nul is, dan is **F** die gradiënt van een of ander funksie $\phi(x, y, z)$, genoem die potensiaalfunksie van **F**. Laat

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}.$$

Dit beteken dat

$$\mathbf{F} = \nabla\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{bmatrix},$$

met ander woorde,

$$P = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad , \quad Q = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad \text{and} \quad R = \frac{\partial\phi}{\partial z}. \tag{3}$$

Vanaf die kettingreël vir parsiële afgeleides, kry ons dat

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz, \tag{4}$$

maar let op dat $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ as volg uitgebrei kan word

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = Pdx + Qdy + Rdz, \tag{5}$$

en deur (5) met (4) te vergelyk, is dit duidelik dat

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = d\phi. \tag{6}$$

Die integraal (2) kan dan eenvoudig as volg bereken word:

$$W = \int_A^B d\phi = \Big[\phi(x,y,z)\Big]_A^B. \tag{7}$$

Hoe kan 'n mens $\phi$ uit $\mathbf{F}$ vind? Ons wys hier twee verskillende maniere, wat ons sal noem [1] die Integrasie-Differensiasie-metode, en [2] die Termversamelingsmetode. Hierdie metodes sal by wyse van 'n voorbeeld geïllustreer word .

<u>Voorbeeld:</u> Vind die potensiaalfunksie van $\mathbf{F} = (2xyz^3 + 3z)\mathbf{i} + (x^2z^3 + z)\mathbf{j} + (3x^2yz^2 + 3x + y + 5)\mathbf{k}$.

Laat one eers kontroleer dat die vektorveld konserwatief is.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2xyz^3 + 3z \\ x^2z^3 + z \\ 3x^2yz^2 + 3x + y + 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3x^2z^2 + 1) - (3x^2z^2 + 1) \\ (6xyz^2 + 3) - (6xyz^2 + 3) \\ 2xz^3 - 2xz^3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Ja, dit is inderdaad.

<u>Vind van $\phi$ deur die Integrasie-Differensiasie-metode:</u>

Omdat

$$P = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \qquad \text{en} \qquad R = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \tag{8}$$

kan ons die eerste vergelyking van (8) na $x$ integreer,

$$\begin{aligned} \int d\phi &= \int (2xyz^3 + 3z)dx \\ \phi &= x^2yz^3 + 3xz + g(y,z) \end{aligned} \tag{9}$$

waar $g(y,z)$ 'n 'integrasiekonstante' is, m.a.w. dit is konstant met betrekking tot $x$, maar dit mag van $y$ en $z$ afhang.

Ten einde $g(y,z)$ te vind, differensieer ons (9) na $y$, en vergelyk dit met $Q$,

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2z^3 + \frac{\partial g}{\partial y} = x^2z^3 + z, \tag{10}$$

dus $\dfrac{\partial g}{\partial y} = z$. Deur dit na $y$ the integreer, verkry ons

$$\int \frac{\partial g}{\partial y} = \int z dy, \tag{11}$$

en daarom is

$$g(y,z) = yz + h(z), \tag{12}$$

waar $h(z)$ 'n integrasiekonstante m.b.t. $y$ is, maar wat van $z$ mag afhang. Deur (12) in (9) in te stel, gee

$$\phi = x^2yz^3 + 3xz + yz + h(z). \tag{13}$$

Ten laaste moet ons (13) na $z$ integreer, en dit vergelyk met $R$ om die korrekte uitdrukking vir $h(z)$ te verkry.

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 3x^2yz^2 + 3x + y + h'(z) = 3x^2yz^2 + 3x + y + 5.$$

Dus $h'(z) = 5$, en integrasie na $z$ gee

$$h(z) = 5z + C. \tag{14}$$

Na instelling van (14) in (13), verkry ons

$$\phi = x^2yz^3 + 3xz + yz + 5z + C. \tag{15}$$

Vind van $\phi$ met die Termversamelingsmetode:

Hierdie metode blyk korter te wees, maar 'n mens moet versigtig wees om die terme korrek te versamel.

Ons maak weer gebruik van die feit dat

$$P = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \qquad \text{and} \qquad R = \frac{\partial \phi}{\partial z}. \tag{16}$$

Ons integreer $P$ na $x$, $Q$ na $y$ en $R$ na $z$:

$$\begin{aligned} \int d\phi &= \int P dx \\ \phi &= \int (2xyz^3 + 3z)dx \\ &= x^2yz^3 + 3xz + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{terme in} \\ y \text{ en } z}}{\ldots\ldots\ldots} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int d\phi &= \int Q dy \\ \phi &= \int (x^2z^3 + z)dy \\ &= x^2yz^3 + yz + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{terme in} \\ x \text{ en } z}}{\ldots\ldots\ldots} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int d\phi &= \int R dz \\ \phi &= (3x^2yz^2 + 3x + y + 5)dz \\ &= x^2yz^3 + 3xz + yz + 5z + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{terme in} \\ x \text{ en } y}}{\ldots\ldots\ldots} \end{aligned}$$

In elk van hierdie uitdrukkings ontbreek daar terme (díe terme wat van die ander twee veranderlikes afhang) as 'n mens na 'n spesifieke veranderlike integreer. Natuurlik sal enige term wat van $x$, en $y$, sowel as van $z$ afhang, in al drie gevalle verskyn. 'n Term in $x$ en $z$, byvoorbeeld, (soos die term $3xz$ in die voorbeeld) sal verskyn waar 'n mens na $x$ integreer, sowel as waar 'n mens na $z$ integreer, maar dit sal nie verskyn waar jy na $y$ integreer nie. Dit is nou nodig om die terme te versamel om die funksie $\phi$ te vorm. In hierdie voorbeeld is $\phi$ dus as volg,

$$\phi = x^2yz^3 + 3xz + yz + 5z + C, \tag{17}$$

waar ons die konstante $C$ bygevoeg het.