TW 214 — TOETS 1 - VOORBEREIDING — 2017

TOETS 1 - VOORBEREIDING
TEST 1 - PREPARATION

Die toets gaan oor die volgende onderwerpe: Vektore, LU-ontbinding, Matriksmanipulasie, Lineêre onafhanklikheid, Oplos van 'n onderbepaalde stelsel, Kolom- en Nulruimtes van 'n matriks, Projeksies en Refleksies.

Vir Toets 1 moet jy die volgende kan doen:

VEKTORE

— Lengte van vektor en dotproduk ken en kan bereken.

— Hoeke tussen vektore kan bereken.

— Hoeke en lengtes kan bereken in R^3. (bv. tutprobleem 1.9, 1.10, 1.11)

MATRIKSBEWERKINGS EN LU-ONTBINDING VIR $n \times n$-MATRIKSE

— manipulasie met matriksvergelykings kan doen (bv. tutprobleme 2.4, 2.10, 2.12(f)).

— LU-ontbinding en LDU-ontbinding van 'n vierkantige matriks A kan doen

— Oplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ met LU-ontbinding, en dan voorwaartse en terugwaartse substitusie kan kry

— *Laat uit: Cholesky ontbinding vir simmetriese matrikse,*

— Die volgende terme en begrippe moet verduidelik kan word en korrek gebruik kan word: elementêre, bodriehoeks-, onderdriehoeks-, permutasie en diagonaal- matrikse, spil-element, singulier, inverse, transponent, simmetriese matrikse, antisimmetriese matrikse.

The test will be on the following topics: Vectors, LU-decomposition, Matrix manipulation, Linear independence, Solving under determined systems, Column and null space of a matrix, Projections and Reflections.

For Test 1, you must be able to do the following:

VECTORS

— *Know and be able to calculate the length of a vector and dot product.*

— *Be able to calculate angles between vectors.*

— *Be able to calculate angles and lengths in R^3. (e.g. tut problem 1.9, 1.10, 1.11)*

MATRIX MANIPULATION AND LU-DECOMPOSITION FOR $n \times n$ -MATRICES

— *be able to do manipulation with matrix equations (e.g. tut problems 2.4, 2.10, 2.12(f)).*

— *be able to do LU-decomposition and LDU-decomposition of a square matrix A*

— *be able to obtain solutions of $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ with LU-decomposition, and then forward and backward substitution*

— Omit: Cholesky decomposition for symmetric matrices,

— *Be able to explain and correctly use the following terms and concepts: elementary, upper-triangular, lower-triangular, permutation and diagonal matrices, pivot element, singular, inverse, transpose, symmetric matrices, skew-symmetric matrices.*

VEKTORRUIMTES

- Wanneer is 'n versameling 'n *vektorruimte*? Moet kan vasstel of 'n gegewe versameling 'n vektorruimte is (bv. tutprobleem 4.3).
- Moet gegewe vektorversamelings meetkundige kan beskryf (byvoorbeeld 'n vlak, 'n lyn, die eerste kwadrant, ens.). (bv. tutprobleme 4.1).
- Moet die dimensie van 'n vektorruimte kan bepaal. Meer ingewikkelde voorbeelde waar trapvorm nodig is om die dimensie te bepaal, kan gevra word.
- Moet kan bepaal of 'n gegewe stel vektore lineêr onafhanklik is. Eenvoudige voorbeelde waar die onafhanklikheid/afhanklikheid maklik ingesien kan word sonder uitvoerige bewerkings (bv. tutprobleem 4.6) kan gevra word, sowel as meer ingewikkelde voorbeelde waar trapvorm nodig is.

VECTOR SPACES

- *When is a set a* vector space*? Must be able to determine whether a given set is a vector space (eg. tut problem 4.3).*
- *Must be able to describe given vector sets geometrically (e.g. a plane, a line, the first quadrant, etc.). (e.g. tut problem 4.1).*
- *Must be able to determine the dimension of a vector space. Examples where echelon form is necessary to determine the dimension, may be asked.*
- *Must be able to determine whether a given set of vectors is linearly independent. Simple examples where the independence/dependence can easily be seen without many calculations (e.g. tut problem 4.6) may be asked, but more complex examples where echelon form is necessary may also be asked.*

MATRIKS-RUIMTES en OPLOS VAN REGHOEKIGE STELSELS

- Moet basisse vir die nulruimte, en kolomruimte van 'n reghoekige matriks kan vind. Portretvormige of landskapvormige matrikse kan gevra word.

(*Laat uit: die vind van basisse vir die ryruimte en linksnulruimte*)

- Moet die dimensies van die nulruimte, kolomruimte, ryruimte en linksnulruimte van 'n matriks kan vind, en kan verduidelik waar dit vandaan kom.
- Moet die rang van 'n reghoekige matriks kan vind.

MATRIX SPACES and SOLUTION OF RECTANGULAR SYSTEMS

- *Must be able to find bases for the null space, and column space of a rectangular matrix. Portrait-shaped or landscape-shaped matrices may be asked.*

*(*Omit: Finding bases for the row space and the left null space.*)*

- *Must be able to find the dimensions of the null space, column space, row space and left null space of a matrix, and explain where it comes from.*
- *Must be able to find the rank of a rectangular matrix.*

— Moet 'n reghoekige stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kan oplos, as $\mathbf{b}$ in die kolomruimte van A lê, of kan aantoon dat geen oplossing bestaan nie (d.w.s. kan aantoon dat $\mathbf{b}$ nie in die kolomruimte van A lê nie.) Weereens mag A of portretvormig of landskapvormig wees.

— Moet kan verduidelik hoekom die dimensies van die kolomruimte en ryruimte van 'n $m \times n$-matriks A r is (waar $r = \text{rang}(A)$), en díe van die nulruimte $n - r$ en die linksnulruimte $m - r$ is. Moet ook kan verduidelik in watter draer-ruimtes elk van die vier ruimtes van A lê.

— Die volgende terme en begrippe moet verduidelik en korrek gebruik kan word: R^n, draer-ruimte ("host space"), vektorruimte, lineêre onafhanklikheid, dimensie, rang, onderspan, basis, nulruimte, kolomruimte, ryruimte, linksnulruimte.

— *Must be able to solve a rectangular system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, if $\mathbf{b}$ lies in the column space of A, or show that no solution exist (i.e. show that $\mathbf{b}$ does not lie in the column space of A.) Again, A may be portrait-shaped or landscape-shaped.*

— *Must be able to explain why the dimensions of the column space and row space of an $m \times n$-matrix A is r (where $r = \text{rank}(A)$), and that of the nullspace is $n - r$ and the left nullspace $m - r$. Must also be able to explain in which host spaces each of the four spaces of A lie.*

— *Must be able to explain and correctly use the following terms and concepts: R^n, host spaces, vector space, linear independence, dimension, rank, span, basis, nullspace, column space, row space, left nullspace.*

PROJEKSIES EN REFLEKSIES

— Die projeksie van $\mathbf{b}$ op lyn gegee deur $\mathbf{a}$ kan vind, of die projeksie van $\mathbf{b}$ op die vlak onderspan deur $\mathbf{a}_1$ en $\mathbf{a}_2$ kan vind. Ook die projeksies van $\mathbf{b}$ op die ruimtes loodreg op hierdie ruimtes kan vind.

— Afleiding kan doen van die projeksiematriks P wat alle vektore op A se kolomruimte projekteer, en dit kan toepas.

— Die eienskappe van die projeksiematrikse van die vorm $A(A^TA)^{-1}A^T$ kan aantoon.

— Die projeksiematriks kan vind wat op die ortogonale kompliment van A se kolomruimte projekteer kan vind, en sy eienskappe aantoon.

— Die verwante refleksiematriks uit 'n projeksiematriks kan vind, en sy eienskappe aantoon.

PROJECTIONS AND REFLECTIONS

— *Find the projection of $\mathbf{b}$ on the line given by $\mathbf{a}$, or the projection of $\mathbf{b}$ on the plane spanned by $\mathbf{a}_1$ and $\mathbf{a}_2$. Also, be able to find the projections of $\mathbf{b}$ on the spaces perpendicular to these spaces.*

— *Be able to derive the projection matrix P that projects all vectors on the column space of A, and apply it.*

— *Prove the properties of projection matrices of the form $A(A^TA)^{-1}A^T$.*

— *Be able to find the projection matrix that projects on the orthogonal compliment of the column space of A, and prove its properties.*

— *Find the corresponding reflection matrix from a projection matrix, and prove its properties.*

— Die eienskappe van die refleksiematrikse van die vorm $2P - I$ kan aantoon.

— Die verwante refleksiematriks vir 'n spieël kan vind (uit die projeksiematriks op die spieël, 2D of 3D), en sy eienskappe kan aantoon.

— *Laat uit: probleme met ligstrale op gekromde spieëls.*

— *Be able to prove the properties of a reflection matrix of the form $2P - I$.*

— *Find the relevant reflection matrix from its associated projection matrix and prove its properties.*

— Omit: problems with light beams on curved mirrors.

ALGEMEEN

— Die volgende terme en begrippe moet verduidelik en korrek gebruik kan word: ortogonale vektore, ortonormale vektore, spil-element, leidende koëffisiënt, ry-bewerking, rang, singulier, onderspan, onafhanklik, basis, vektor-ruimte, projeksie op 'n onderruimte, projeksiematriks, refleksiematiks, komponente in of loodreg op 'n ruimte, oorbepaalde en onderbeplaalde stelsels.

GENERAL

— *Must be able to explain and correctly use the following terms and concepts: orthogonal vectors, orthonormal vectors, pivot element, leading coefficient, row operation, rank, singular, span, independent, basis, vector space, projection on a subspace, projection matrix, reflection matrix, components in or perpendicular to a space, under determined and over determined systems.*